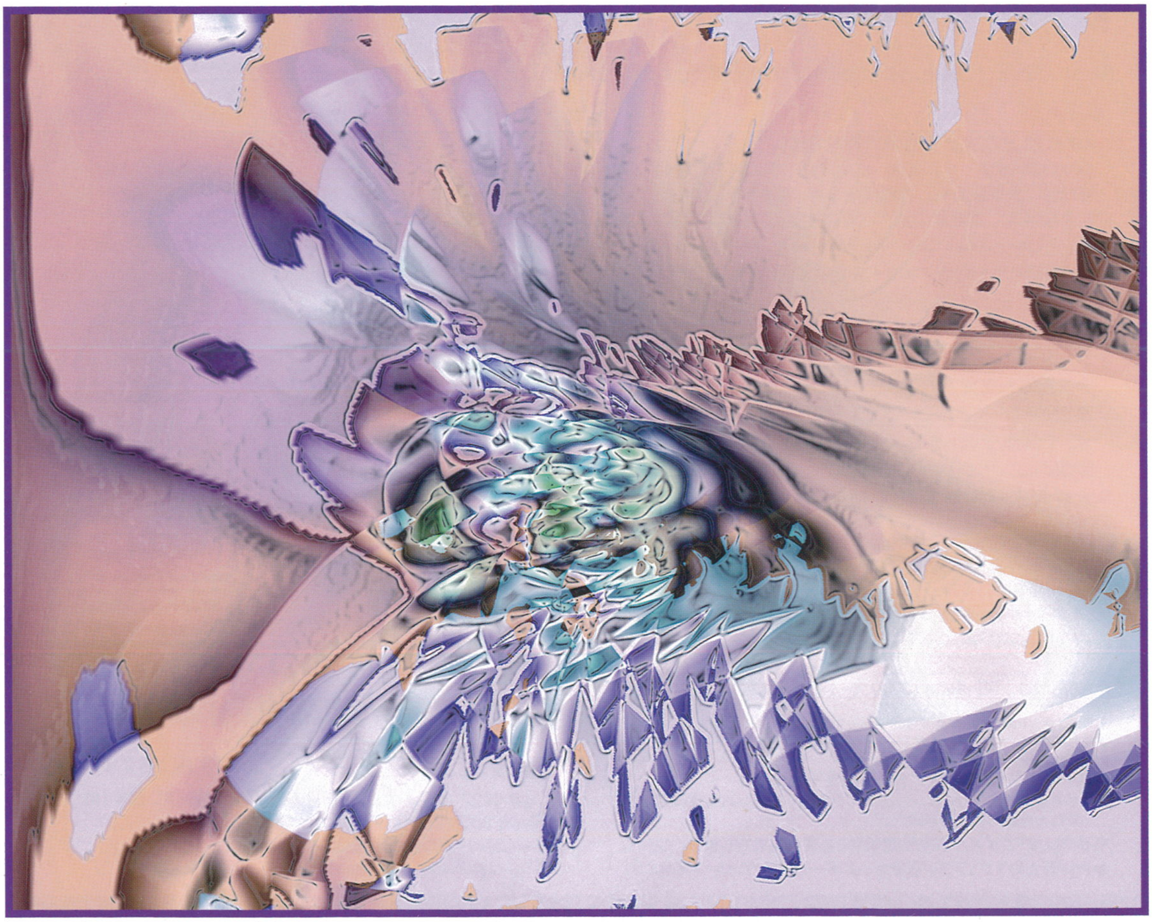
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年11月1日発行　第47巻11号　毎月1回1日発行

ISSN 0386—2240

数理科学

11
2009

特集 可積分系の世界
数理物理を語るための知のツール



No.557

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 557 November 2009

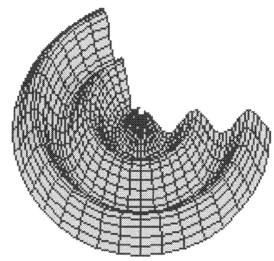
可積分系の世界

数理物理を語るための知のツール

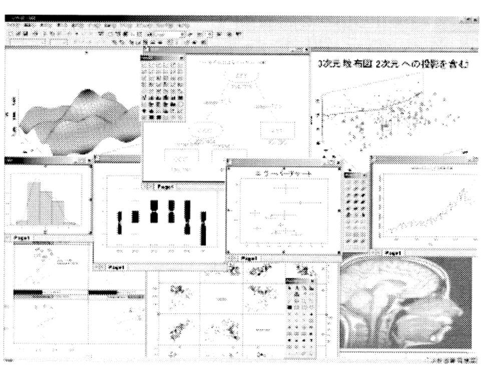
表紙：戸川　隼人

■広告企画■

科学技術計算・ビジュアリゼーションソフト最前線



汎用データ解析ソフトウエア
S－PLUS



Ｓ－ＰＬＵＳは高度で最新の解析手法と豊富なグラフィックスを備え、さまざまな分野で利用できる汎用のデータ解析ソフトウエアです。データの整理、加工、抽出から各種の解析、グラフ出力まで研究開発を一貫して支援いたします。世界中の数多くの研究開発機関、あるいは教育機関での導入実績を誇ります。

・４０００種類以上の高度で最新の解析手法を標準で備えています。（基本演算、行列演算、線形代数、シミュレーション、多変量解析、回帰分析、分散分析、線形モデル、医薬生物統計、検定、時系列解析、ＯＲ、ニューラルネット他）

・３Ｄプロットを含む高品質で多種のグラフィックスを備え、グラフのカスタマイズも自由自在です。

・米国ベル研究所で開発されたオブジェクト指向データ解析言語「Ｓ」を備え、解析手法のカスタマイズや新規開発、プログラミングが手軽に行えます。

・ＯＬＥやＯＤＢＣといったインターフェースを備え、他ソフトウエアとの連携動作可能な上、入出力も様々なアプリケーション、画像フォーマットに対応します。

・これらの機能を WWW 経由で利用可能にするサーバソフトウエア StatServer もございます。

・常設のトレーニングコース、強力なサポートで研究を側面支援いたします。

・Windows、Linux、主要 UNIX に対応しています。

■問い合わせ先■

株式会社数理システム

〒160-0022 東京都新宿区新宿 2-4-3
フォーシーズンビル 10F
TEL03-3358-6681　FAX03-3358-1727
E-mail:splus-info@msi.co.jp
URL:http://www.msi.co.jp/splus/

November 2009 MATHEMATICAL SCIENCES Number 557

特集／可積分系の世界

はじめに

時弘　哲治

1. 数理科学の目標

数理科学の目標の一つは，数学を言葉および手段として私たちの身の回りにある自然や社会を理解し，私たちの生活に役立てることであろう．現実の自然現象あるいは社会現象は大変複雑であるため，まずその現象を記述するモデルを立て，そのモデルが現象の特徴を再現することを確かめてモデルの妥当性を確認し，そのモデルの数学的構造から現象の本質を理解し，そのモデルから導かれる結論によって現象の制御・応用を考えることになる．例えば，台風の渦の動きなどような巨視的な現象を考えるには流体の基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式などの微分方程式によるモデルを用い，半導体の電子状態といった微視的な世界を記述するには量子力学に基づいたモデルを扱っている．

しかし，実際に微分方程式や量子力学などを使ったことのある人はたぶんお分かりと思うが，現象のモデルとして考えつく微分方程式のほとんどは解くことはできないし，現実的な量子系のハミルトニアンを対角化することも，統計力学模型の分配函数を求めることも，多くの場合不可能である．そのため，定性的な議論，近似手段，数値計算などに頼らざるを得ない．計算機の性能および計算スキームが飛躍的に向上した現在では，モデルができた場合，とりあえず，数値計算して結果をみることが多いように思われる．むろん，その定性的な理論や数値シミュレーションの結果で十分満足の行く結果が得られることも多いが，できるものなら厳密に解いてすっきりしたいのが人情であろう．

2. 可積分系とは

厳密に解けるモデルの理想的な例としては，本特集でも Willox 氏の記事に登場する**ソリトン**（粒子的な振舞いをする孤立波）があげられる．孤立波の観測された浅い水面を伝わる孤立波を記述するために，流体の基礎方程式から **KdV**（Korteweg-de Vries）**方程式**が導かれたが，それは実際に孤立波解を再現することによって妥当性が認められた．その後の孤立波の粒子性の発見などを通じて，KdV 方程式の数学的構造（線形系の両立条件であること，対称性，無限次元のハミルトン構造など）を明らかにすることによって，初期値問題の解法が示され，多重ソリトン解が構成された．その結果，物理学分野ではソリトンという素励起の概念が導入され，工学面では光ソリトン通信などへ応用されてきた．また，ソリトンの統一理論である佐藤

幹夫の**KP 階層の理論**は，物理学・数学の様々な分野に影響を与え，応用されている．

可積分系とは，おおざっぱに言うと，厳密に解ける非線形方程式や多体の量子力学・統計力学模型のことである．上記のソリトン方程式や新しい性質の良い超越関数を定義するパンルヴェ方程式は，微分方程式の可積分系の例である．これらは**古典可積分系**と呼ばれる．これに対して厳密に解ける量子力学・統計力学模型は**量子可積分系**と呼ばれ，代表的なものに 1 次元 **XXZ 量子スピン模型**や 2 次元**イジング模型**などがある．量子可積分系の研究対象となるのは単純な変換で線形方程式や自由粒子の模型に帰着する系ではなく，それなりに大掛かりな数学的枠組みを必要とする．最初に見出された非自明な量子可積分系の例は，おそらく，1 次元**ハイゼンベルグ量子スピン模型**（XXX モデル）であろう．この模型は H. Bethe によって現在では**ベーテ仮設法**と呼ばれる手法で解かれたのだが，それは，波動関数を平面波の線形結合で表し*1)，その線形結合の係数たちの満たす連立の非線形代数方程式を解くといったものであった．また，2 次元イジング模型では，最初にこの模型の自由エネルギーを厳密に求めた L. Onsager の解法は行列のテンソル積を用いた相当に複雑なものである．2 次元の特殊なポテンシャル下の電子の振舞いを記述する**カロジェロ–サザーランド模型**や，8 種類の頂点によって記述される格子模型である **8 頂点模型**などは，一層の工夫が必要であった．現在では多くの研究者が系の様々な**相関函数**を求めるために努力を続けているが，これは自由エネルギーを求めることとは比較にならないほど困難なことが多い．このように，可積分系を解くためには，たいていの場合，複雑でかなり大掛かりな手順を踏まなければならない．しかし，厳密に解けるがゆえに，その結果は完全に信頼できる．また，解を求めるための数学的枠組みを構成する努力は，新しい数学概念を生み，数学の新たな分野を拓いてきた*2)．何より，いくつもの数学的手法の理解と計算努力の結果，ようやく解に到達したときの「すっきり」感は可積分系研究の醍醐味であろう．

3. 可積分系と非可積分系

一方，先に述べたように現実の系はほとんど非可積分系であり，ソリトンのような例外はあっても，可積分系を研究することが現実の系を考察する上で役に立たないのではないかと言う批判も良く耳にする．確かに，パターン形成などの基本方程式である反応拡散方程式はまず非可積分方程式であるし，量子可積分系は実質的に空間 1 次元系のみであり*3)，**近藤効果**のような例外はあっても*4)，現実の空間 3 次元の系を記述するとは言い難い．現実の系の中で可積分系の測度は限りなく 0 に近いのに，数理物理学者の中で可積分系を研究する人の測度が大きすぎるという意見を聞いて，苦笑した覚えもある．だが，例えば，現実には線形の系はほとんど存在しないが，線形方程式の有用性については，身の回りに多くの例があり，異論はないであろう．同様に，可積分系から生み出された概念や手法も非常に多くの分野に応用され成果をあげている．この特集号では，ソリトン，共形場理論，弦理論，重力といったキーワードをあげ，可積分系のルーツから諸分野の最先端の研究まで広く紹介・解説されている．どの記事も可積分系の面白さと有用性が伝わる内容になっていると思う．これらの記事からお分かりいただけると思うが，可積分系の研究は，次々と新たな対象を開拓し，新たな概念を生み出し発展してきている．また何年かの後には新たなキーワードをもとに可積分系の特集が組まれることを期待している．

（ときひろ・てつじ，東京大学大学院数理科学研究科）

*1) 正確には，系の基底の係数を平面波で表示したもの．

*2) 量子群（量子代数）をもって嚆矢とする．本特集号の尾角氏の解説を参照されたい．

*3) 可解格子模型は空間 2 次元の模型であるが，厳密解を求めることは転送行列を対角化することであり，この転送行列は 1 次元量子模型のハミルトニアンに対応する．

*4) 磁性を持つ不純物の影響で電気抵抗に異常を生じる効果．N. Andrei と P.B. Wiegmann によって厳密解が得られた．

可積分系とは何か

その歴史と発展

薩摩 順吉

1. 可積分

大学理工系学部においては，通例2年次に微分方程式の講義が配置されている．筆者もここ数年講義を担当しているが，シラバスの概略は以下の通りである．まず，微分方程式の例を挙げた後，初等解法を説明し，定数係数線形微分方程式にかなりの時間を割く．その後，解の存在と一意性に触れ，非線形問題解析に必要な相空間について議論する．

初等解法のうち，変数分離法は微積分の基本定理を用いて簡単に解ける．また，線形方程式に対しては統一した手法を提示することができる．しかし，同次型方程式や，ベルヌーイ方程式，リカッチ方程式などはうまい変数変換を見つけないと解くことができない．初等解法と言うけれども，実は決して初等的なものではないのである．解析学が大きな発展を遂げた時代に，オイラーを筆頭とする先達が，とくに力学を記述する様々な微分方程式を導いた．それらの一般解を見つける，すなわち求積するという努力の中で，いくつかの非線形方程式に対してうまい変換を発見したのである．可積分系とは，最も素朴には，こうした求積によって解くことのできる方程式たちのことを言う．

可積分系は完全積分可能系と言うこともある．力学系の研究が進むにつれて，可積分という言葉はより広い意味で使われるようになる．すなわち，連立1階の偏微分方程式に対して，すべての式が共通した解を持つ場合，可積分もしくは完全積分可能と言う．そして，その延長上に完全積分可能なハミルトン力学系の議論がある．自由度 N のハミルトン力学系において N 個の独立な積分が存在し，それらが互いに包含的であるとき，完全積分可能である．このとき，独立な積分を用いて力学系の運動を完全に決定することができる．つまり，可積分性は初期値問題の解が得られるという意味を持っているのである．

2. パンルヴェ方程式

力学系の一例としてこまがある．一点支持のこまは，剛体に固定した座標系のオイラー角と角速度で決まる3自由度の運動をすると考えることができる．したがって，3つの積分すなわち保存量が求まれば，運動は完全に決定する．そのうちの2つはエネルギー保存と回転軸まわりの角運動量保存である．もう一つの保存量が問題で，古くから外力のない場合の剛体の自由回転としてオイラーが与えたものと，軸対称のこまに対してラグランジュが与えたものの2つの例が，第3の保存量をもつ場合として知られていた．つまり，この2つについて運動を支配する微分方程式は可積分なのである．19世紀の後半，これら以外に運動を決定できるこまは存在するのかという数理物理学の問題が投げかけられていた．答を与えたのはコワレフスカヤである．彼女が提出したのは現在コワレ

フスカヤのこまと呼ばれている非対称な回転剛体であり，答を得るのに彼女が着目したのはこまの運動を表す非線形常微分方程式の解に関する性質であった．すなわち，極以外に動く特異点を持たないとき解ける可能性があると予測し，実際に条件を満たすのはオイラー，ラグランジュそして彼女のこまであることを解析的に証明した．この結果は数学的に新しい方向を生み出すものであった．

線形常微分方程式では，解の特異点はすべて方程式の係数の特異性と関係しており，決して積分定数にはよらない．そのような特異点を動かない特異点と言う．ところが非線形常微分方程式の場合，例えば

$$\frac{dw}{dz} + w^2 = 0$$

の一般解は，C を積分定数として

$$w = \frac{1}{z - C}$$

と書かれる．これは1位の極であるが，極の位置が積分定数によっているので動く特異点と言う．コワレフスカヤはこうした意味で極以外に動く特異点をもたないという性質をこまの微分方程式に要求したのである．

もう少し一般的な場合はどうであろうか．比較的簡単な1階の常微分方程式

$$\frac{dw}{dz} = F(w, z)$$

については，F が w の有理関数で，z について局所的に解析的であるとすると，一般化されたリカッチ方程式

$$\frac{dw}{dz} = P_0(z) + P_1(z)w + P_2(z)w^2$$

だけがそうした性質をもつことが知られていた．コワレフスカヤの仕事の後，パンルヴェと彼の共同研究者たちは2階の方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2} = F\left(\frac{dw}{dz}, w, z\right)$$

について同じ問題を扱った．19世紀末から20世紀にかけての彼らの研究結果は，次のようにまとめられる．

上式の形で極以外に動く特異点をもたない方程式は50個の標準的なものだけで，それらはすべて解がわかっている方程式か，解かれていない6個の代表的な方程式に帰属される．

6個の方程式が現在パンルヴェI型からVI型方程式と呼ばれているものである．一つだけ具体形を与えておこう．パンルヴェI型方程式は

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z$$

と書かれる．パンルヴェ方程式の解は指数関数などの古典超越関数で表せず，パンルヴェ超越関数というものを定義する．

パンルヴェ方程式に関する研究はその後それほど広がらなかった．西欧の数カ国と日本で細々と研究が続けられていたに過ぎない．長年忘れられていたパンルヴェ方程式が再登場するのは1970年代に入ってからである．1976年から77年にかけて，ウーたちは2次元イジング模型のスピン・スピン相関関数について，そのスケーリング極限でパンルヴェIII型方程式が生じることを示した．こうした物理との接点の中で，再びパンルヴェ方程式が注目を浴びることになる．日本で細々と研究を続けていた岡本和夫は，6つのパンルヴェ方程式にハミルトニアン構造をもちこみ，そのそれぞれについて，ある複素曲面と特異集合の組を対応させるという幾何学的な仕事をし，その後のパンルヴェ方程式の研究に大きな影響を与えている．

■ 3. KdV 方程式 ■

ウーたちの2次元イジング模型に関する研究のきっかけを与えたのは，ソリトンの発見であると言ってよいであろう．第2次大戦後，コンピュータが平和利用され，研究者が軍事目的でない基礎研究に用いることができるようになった．フェルミたちはエルゴード問題と関連して非線形格子に関する数値計算をコンピュータ上で行い，予想に反した再帰現象を見出した．再帰現象を理解するために行われた研究の一つがザブスキーとクラス

カルによる別の数値計算である．

彼らは非線形格子を連続近似したKdV方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

の数値シミュレーションを行った．その中で，いくつかの非線形パルスが衝突しても変形せず，安定に振る舞うことを発見し，これらのパルスをソリトンと名付けた．どのようなからくりで，こうした安定なパルスが存在するのか．クラスカルたちのグループは解析的な研究を開始する．

グループの一人，ミウラは極めて泥くさい計算の後に，KdV方程式が無限個の保存量をもつことを発見した．要となる関係式はKdV方程式の解 u と，変形KdV方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t}-6v^2\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0$$

の解 v を結ぶ変換

$$u=v^2+\frac{\partial v}{\partial x}$$

である．この式をミウラ変換と言う．

ミウラ変換はその後の逆散乱法の発見に大きな役割を果たす．逆散乱法とは，KdV方程式の初期値問題を直接解く代わりに，u をポテンシャルとしてもつシュレディンガー方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+u\psi=\lambda\psi$$

とやはり線形の式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}+3(u+\lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x}=0$$

を用いるというものである．クラスカルたちは，この方法により，厳密解を求めるのが極めて困難であると考えられていた非線形偏微分方程式を極めて巧妙なやり方で解くのに成功したのである．

KdV方程式はこれまで述べたように，1) 任意個のソリトンが衝突する状態を表す厳密解が存在，2) 原理的に初期値問題が解ける逆散乱法の定式化が可能，3) 無限個の独立な保存量・対称性が存在，という性質をもっている．性質のうち2), 3)は最初に述べた有限次元ハミルトン力学系がもつ性質を無限次元に拡張したものと考えられる．その意味でKdV方程式は可積分であると言ってよい．次元が無限なので，現在は無限可積分系の代表的な方程式という表現がなされている．

なお，変形KdV方程式の相似解を表す方程式は適当な変数変換の後，パンルヴェII型方程式

$$\frac{d^2 w}{dz^2}=zw^3+zw+\alpha$$

になることが知られている．KdV方程式もパンルヴェ方程式の研究を再燃させたと言ってもよい．

■ 4. ソリトン理論の展開 ■

KdV方程式以外に同様な性質をもつ方程式はないだろうか．そうした探索に役立ったのがラックス形式である．ラックスはクラスカルたちの結果を一般化して，次の結果を得た．

2つの線形方程式

$$L\Psi=\lambda\Psi,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}=B\Psi$$

について，L, B がある条件を満たすとき，両立条件として得られる

$$L_t=[B,L]$$

は逆散乱法で解ける非線形偏微分方程式である．なお，式中の添字 t は t に関する微分を表す．

この形式を用いて，1970年以降，様々な物理的に重要な方程式が，KdV方程式と同様の性質をもつことが明らかにされた．代表的な方程式を挙げると，光ソリトンの伝搬を記述する非線形シュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+2|\psi|^2\psi=0$$

結晶内転移の伝搬のように，周期ポテンシャル中の非線形波動を表すサイン–ゴルドン方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sin u$$

指数関数型のポテンシャルをもつ戸田格子方程式

$$\frac{d^2 y_n(t)}{dt^2}=e^{\{y_{n-1}(t)-y_n(t)\}}-e^{\{y_n(t)-y_{n+1}(t)\}}$$

などである．これらの方程式は，KdV方程式同様，ソリトン解をもち，逆散乱法の定式化が可能

であり，無限個の独立な保存量を有するので，無限可積分系に属する方程式である．総称してソリトン方程式と言う．

ソリトン方程式を見出し，それらの解を得る方法として広田良吾先生によって開発された直接法（広田の方法）がある．この方法を用いると，任意個のソリトンが相互作用している解（N ソリトン解）を代数的な操作で得ることができる．例えば，KdV 方程式を空間２次元系に拡張した KP 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{\partial u}{\partial t}-12u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

の場合，従属変数変換 $u=\partial^2\log\tau/\partial x^2$ を施すと，適当な境界条件の下で，

$$(4D_xD_t-D_x^4-3D_y^2)\tau\cdot\tau=0$$

の双１次形式に帰着される．ただし，D_x, D_y, D_t は

$$D_x^n a(x)\cdot b(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n a(x)b(x')\bigg|_{x=x'}$$

などで定義される広田演算子である．双１次形式で書かれた KP 方程式が

$$\tau=\begin{vmatrix} f^{(1)} & \frac{\partial}{\partial x}f^{(1)} & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}}f^{(1)} \\ f^{(2)} & \frac{\partial}{\partial x}f^{(2)} & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}}f^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(N)} & \frac{\partial}{\partial x}f^{(N)} & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}}f^{(N)} \end{vmatrix}$$

というロンスキアン型の解をもつことが代数的に示せるのである．ただし，$f^{(\cdot)}$ は分散関係式，$\partial f^{(\cdot)}/\partial y=\partial^2 f^{(\cdot)}/\partial x^2$，$\partial f^{(\cdot)}/\partial t=\partial^3 f^{(\cdot)}/\partial x^3$ を満たしている関数である．

広田の方法は，単に解を得るだけでなく，ソリトン方程式，ひいては無限可積分系の数学的構造を明らかにするのに大きな役割を果した．双１次形式で書かれた KP 方程式が幾何学におけるプリュッカー関係式であることを見抜かれたのは，佐藤幹夫先生たちであった．n 次元射影空間内の m 次元部分空間全体からなる集合をグラスマン多様体と言い，その多様体に導入する座標がプリュッカー座標である．KP 方程式は自明でない最も簡単な $n=3, n=1$ の場合にプリュッカー座標が満たす関係式なのである．

佐藤先生たちはこの結果を手がかりとして，KP 方程式の解と無限次元グラスマン多様体 GM の点が１対１に対応し，ほとんどすべてのソリトン方程式の解が，GM の変換群 $GL(\infty)$ の部分群の軌道として得られるという著しい結果を得られた．佐藤理論は周辺に大きな影響を及ぼす．当時佐藤先生のおられた京都大学数理解析研究所およびその周辺において，伊達，神保，三輪，柏原たちが精力的に研究を進め，ソリトン方程式の変換群のリー環として，カッツ・ムーディ・リー環が現れることを示した．また，彼らは解の間の関係も頂点作用素によって極めて明快なものになることも明らかにした．さらにこうした研究は，共形場理論，格子模型理論，組みひも理論の活発な研究を促す．本稿では触れないが，無限次元可積分系が大きな拡がりを見せるのである．

5. 離散・超離散可積分系

パンルヴェ方程式の独立変数を離散化したものとして，離散パンルヴェ方程式がある．パンルヴェ方程式のもともとのきっかけがコワレフスカヤのこまであったように，離散パンルヴェ方程式の出どころも物理である．1990 年，２次元量子重力のモデルとして，非線形差分方程式

$$u_{n-1}+u_n+u_{n+1}=\alpha+\frac{\beta n+\gamma}{u_n}$$

が提案された．この方程式を離散パンルヴェＩ型方程式と言う．なぜなら，$u=-1/2+\epsilon^2 w$, $\alpha=-3$, $\beta n+\gamma=-(3+2\epsilon^4 z)/4$ として，$\epsilon\to 0$ の極限をとると，パンルヴェＩ型方程式に帰着するからである．

連続的な微分方程式と比べて離散的な差分方程式は解析するのが容易ではなかった．しかし，離散系のほうが解の構造を把握しやすいという特徴をもっている．コンピュータが身近なものとなった現在，直接離散問題が取り扱える時代となった．離散パンルヴェ方程式もそうした背景の下で提案された．グラマティコス，ラマニたちは，数式処理を用いて，一連の離散パンルヴェ方程式を提出

したが，最近ではさらにそれらを拡張したものが活発に研究されている．

ソリトン方程式のすべての独立変数が離散的な完全離散版は広田–三輪方程式

$$\tau_n(l+1,m+1)\tau_n(l,m)-\tau_n(l+1,m)\tau_n(l,m+1)$$
$$=ab\{\tau_{n+1}(l,m+1)\tau_{n-1}(l+1,m)$$
$$-\tau_n(l+1,m+1)\tau_n(l,m)\}$$

である．この方程式は適当な変数変換を行うと，連続極限で様々なソリトン方程式に移行することが示せる．ソリトン系の母方程式と言ってよい．すなわち，ソリトン問題では完全離散系が理論の中心的位置を占めていることになる．

例えば，広田–三輪方程式の解はKP方程式同様，行列式で表現できる．ただし，離散系なのでロンスキアン型ではなく，その離散類似のカソラチ行列式型である．これは一つの例であるが，他にも，離散パンルヴェ方程式や広田–三輪方程式は，連続の場合とほぼ同様の性質をもっている．そのため，これらの方程式も可積分系に属していると考えられる．なお，離散系の場合，積分というより，和分と言ったほうが妥当である．しかし，行きがかり上，可積分系，もしくは離散可積分系という言葉を使う．

すべての独立変数が離散的な完全離散系に対し，従属変数も離散化した系を超離散系という．セルオートマトンは代表的な超離散系である．これまで述べたソリトン方程式に対して，対応する超離散系の存在することが明らかにされてきた．例えば前節で紹介したサイン–ゴルドン方程式の超離散版として

$$\max\left[-|L|+U_{n+1}^{m+1}+U_{n-1}^{m-1},\ |L|-U_{n+1}^{m-1},\ |L|-U_{n-1}^{m+1}\right]$$
$$=\max\left[|L|-U_{n+1}^{m-1}-U_{n-1}^{m+1},\ U_{n+1}^{m+1},\ U_{n-1}^{m-1}\right].$$

がある．この式はmaxと＋のみを含む式であるにも関わらず，その解はソリトン系のもつ特徴をよく保っている．したがって，こうした超離散方程式もやはり可積分系に属するものと考えられている．

素朴な求積法で解が求まる微分方程式から始まって，超離散方程式まで可積分系の拡がりを駆け足で見てきた．昔学生時代に，恩師の一人が「きれいな式には意味がある」とおっしゃったことをいまでもよく覚えている．美しい式を求めて，人間の探求はこれからもずっと続くに違いない．

（さつま・じゅんきち，青山学院大学理工学部）

可積分系と方程式

ソリトンとパンルヴェ方程式



Ralph Willox

ソリトンと**パンルヴェ方程式**は見たところあまり関係なさそうな概念と思われるかもしれない．なぜなら，ソリトンは非線形偏微分方程式の世界における現象だが，パンルヴェ方程式は常微分方程式で，有限次元の世界のものだから．

しかし，実は，ソリトン方程式とパンルヴェ方程式はとても重要な共通点を持っている．それは，可積分系の背景に働きかけている対称性から生じる代数的な構造である．また，数学史上の関連もある．パンルヴェ方程式を生み出した研究分野は 19 世紀閉幕の頃に頂点に達したが，その人気は 20 世紀に入り急速に衰えてしまった．しかし，N.J. Zabusky と M.D. Kruskal が 1965 年にソリトン現象を発見したお陰で**無限次元可積分系**という分野が発達し，1973 年に T.T. Wu たちの Ising 模型についての論文にパンルヴェ III 型方程式が現れたとき，その結果は可積分系の世界に広く伝わり，大きな影響を及ぼした[*1)]．

この記事では可積分系とパンルヴェ方程式の様々な関係を紹介したい．ただ，可積分系自体の性質等についての詳しい説明は本特集の薩摩順吉氏による論説を参考にしてほしい．

1. 偏微分方程式と常微分方程式

偏微分方程式は，独立変数のある特別な組合せにしかよらない特殊解を持つことがある．例えば，Korteweg-de Vries（KdV）方程式[*2)]

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \qquad (1)$$

は，速度 c で進行する波を表す解 $u(x,t) = U(x-ct)$ を持つ．この解は，1 変数関数 $U(z)$, $z = x - ct$ として次の常微分方程式を満たすものである．

$$\left(U'\right)^2 = -2U^3 + cU^2 + \alpha U + \beta. \qquad (2)$$

この方程式の一般解はワイエルストラスの楕円関数 $\wp(z)$ により，$U(z) = \frac{c}{6} - 2\wp(z+\delta)$ で与えられる[*3)]が，$c > 0, \alpha = \beta = 0$ の場合には，双曲線関数で表される有名な**孤立波**という特殊解もある ($c = 4k^2$)．

$$U(x-ct) = 2k^2 \cosh^{-2}\left(k(x-ct) + \delta\right). \qquad (3)$$

KdV 方程式には，上記の解以外にも常微分方程式で定められる解がいくつも存在する．その中で，これから特に注目したいのは，$u(x,t) = (3t)^{-2/3} f\left(\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right)$ の形の**相似解**と呼ばれる解である．ただし，$f(s)$, $s = \frac{x}{(3t)^{1/3}}$ は以下の常微分方程式を満たす．

$$f''' + 6ff' = sf' + 2f. \qquad (4)$$

このように偏微分方程式の解を制限し，元の方程式を常微分方程式に帰着することを方程式の**簡約**と呼ぶ．ここで，上に述べた常微分方程式で定められている解は，近似ではなく，KdV 方程式の**対称性**による厳密な簡約で得られるものであることに注意してほしい．例えば，独立変数 x と t は KdV 方程式に陽に現れないから，(1) は明らかに x と t の平行移動 $x \to x + \varepsilon, t \to t + \delta$ に対して不変である．すなわち，$u(x,t)$ が (1) の解であれば $u(x+\varepsilon, t+\delta)$ もまた (1) を満たす．これは KdV 方程式の対称性の一つである．ところで，最初に紹介した方程式 (2) を満たす特殊解 $U(x-ct)$ は，この対称性の特別な場合である

---

*1）　パンルヴェ II 型方程式が 1964 年に L. Bass の電気分解についての論文に現れたときにこのような効果は現れなかった．研究分野によって影響も違うのだろう．

*2）　これから，時間変数を t，空間座標を x で，偏微分を $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ のように添字で表す．さらに，常微分を $'$ を用いて，$\frac{df(z)}{dz} = f'$ のように表す．

*3）　$\wp(z)$ は具体的に，$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$，$g_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{c^2}{6}\right)$, $g_3 = -\frac{1}{4}\left(\beta + \frac{c}{24}\left(\alpha + \frac{c^2}{9}\right)\right)$ を満たす．

動座標系への変換 $(x,t) \to (x+c\varepsilon, t+\varepsilon)$ の下で不変であり，対称性による簡約の一例になっている．KdV 方程式は平行移動以外にも色々な対称性を持つ．例えば，$u(x,t)$ が解であれば，$\lambda^2 u(\lambda x, \lambda^3 t)$ はまた解である．そして，この変換の下で不変である解はすべて常微分方程式 (4) を満足する関数 $f(s)$ で表せるのである．

2. Miura 変換とダルブー変換

歴史的に，可積分系の研究において，また，KdV 方程式の可積分性に関して大変大きな役割を果たしたソリトン系は**変形型 KdV（mKdV）方程式**である．

$$v_t + v_{xxx} - 6v^2 v_x = 0. \tag{5}$$

実は，mKdV と KdV 方程式を結ぶ変換

$$u = -v_x - v^2 \tag{6}$$

が存在し，この変換によって mKdV 方程式の解 $v(x,t)$ から KdV 方程式の解 $u(x,t)$ を得ることができる．(6) はソリトンの分野でとても有名な Miura 変換*4)である．なお，mKdV 方程式には $v \to -v$ という基本的な対称性がある．従って，Miura 変換で mKdV 方程式のある解 v に対応する KdV 方程式の解 u の他にも，$-v$ に対応する解 $\widetilde{u} = v_x - v^2$ があり，u と $\widetilde{u}$ の間に

$$\widetilde{u} = u + 2v_x$$

という関係がある．つまり，与えられた u に対して，Miura 変換 (6) を v に関する常微分方程式として解釈すると，その方程式を満足する mKdV の解が分かれば，上記の変換 $u \to \widetilde{u}$ によって u から KdV 方程式の新しい解が作れる．Miura 変換を定める方程式はリカッチ方程式で，線形化可能である．実際，Miura 変換と mKdV 方程式において $v(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \ln \psi(x,t)$ とおくと，次の線形方程式系（の $\lambda = 0$ の場合）が得られる．

$$\begin{cases} \psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi, \\ \psi_t = -4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - 3u_x\psi. \end{cases} \tag{7}$$

この線形方程式系は KdV 方程式の可積分性の要である Lax pair[1)] に他ならない．この Lax pair は，KdV 方程式の初期値問題を解くための**逆散乱法**[1,2)] という方法の出発点でもあり，KdV 方程式の特殊解を代数的に構成するためにも役に立つ．Miura 変換の拡張として，与えられた u に対応する Lax pair (7) の解 $\psi(x,t)$ を用いて，

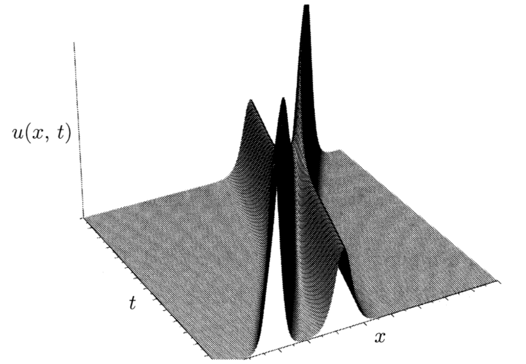


図 1 KdV 方程式におけるソリトン相互作用．

$$u(x,t) \ \mapsto \ u(x,t) + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \psi(x,t)$$

のように KdV 方程式の既に知られている解から新しい解が構成できる．このような Lax pair の解を用いる変換を**ダルブー変換**と呼ぶ．例えば，$u(x,t)$ が孤立波 (3) であるとき，$\psi(x,t)$ は厳密に計算できてしまい，次の新しい解が構成できる $\left(p = 2k, \lambda = \frac{q^2}{4}\right)$．

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \Bigg[& 1 + e^{p(x-p^2t)} + e^{q(x-q^2t)} \\ & + \frac{(p-q)^2}{(p+q)^2} e^{p(x-p^2t)+q(x-q^2t)} \Bigg]. \end{aligned} \tag{8}$$

これは KdV 方程式における 2 個の孤立波の弾性的な衝突を記述する解である．図 1 に描かれている粒子のような相互作用を示す孤立波を**ソリトン**と呼ぶ．(8) で記述されている 2 個のソリトンが追いかけっこをし，衝突後に元の形と速度に戻ることは解の漸近的な挙動からすぐ分かるが，$x \approx \pm\infty$ において十分速く減少する初期値 $u(x,0)$ のほとんどが，時間が経つとソリトンの列に分離することは，逆散乱法により証明された一つの驚くべき結果である．一方，KdV 方程式のソリトンと mKdV 方程式のソリトンの間には実際には Miura 変換のような関係が成り立たないことも逆散乱法のもう一つの重要な結果である．この不思議な性質を証明するとき鍵となるのは，KdV 方程式の相似解が満たす方程式 (4) である．実は，関係式 (6) は $u(x,t) = (3t)^{-2/3} f(s)$, $v(x,t) = (3t)^{-1/3} w(s)$, $s = x(3t)^{-1/3}$ において不変である*5)ので，

$$f(s) = -w' - w^2$$

方程式 (4) はこの関係式によって他の常微分方程式と Miura 変換のような関係を持つことが分かる．その相手の方程式はパンルヴェ II 型方程式（P_{II}）である．

*4) 「数学セミナー」2008 年 8 月号，9 月号の R. Miura による「ソリトンと逆散乱法：歴史的な観点から」参照．

*5) 勿論，$v(x,t) = (3t)^{-1/3} w(s)$, $s = x(3t)^{-1/3}$ で書かれている関数は mKdV の相似解である．

$$w'' = 2w^3 + sw + \alpha \tag{9}$$

従属変数 v と w の関係から分かるように，P_{II} は mKdV 方程式の相似簡約である．

3. パンルヴェ方程式

P. Painlevé と彼の弟子であった B. Gambier による常微分方程式の分類は，おそらく 18 世紀から一世紀半以上も流行った研究プログラムの最終到達点だといっても過言ではない．このプログラムは，線形方程式から始まり，ついには複素領域における非線形方程式にまで拡張された常微分方程式論の一つの目的として，微分方程式によって新しい特殊関数を定義することであった．歴史的な流れを考えると，指数関数を初めとして，ベッセル関数や超幾何関数までの超越関数はすべて線形微分方程式で定まった関数である．この点では，方程式の線形性は重要な役割を果たしている．なぜなら線形常微分方程式の解が持つ特異点はその方程式が持つ特異点に限られているからである．つまり，方程式から解の特異点が読み取れるわけである．それは非線形の場合とは違う．例えば，（n は自然数）

$$y' = \frac{1}{n}y^{n+1}$$

は有限な複素領域において特異点を持っていないのに，この方程式の一般解[*6)] $y(z) = (C - z)^{-\frac{1}{n}}$ には確かに $z = C$ に特異点がある．しかも，この特異点は初期値に依存する位置に生じる．つまり，解の特異点は方程式から決定されないのだ．このような特異点を**動く特異点**と呼ぶ．ところで，$n = 1$ のとき，この特異点は動く極，$n \geq 2$ のとき，動く代数分岐点である．

動く分岐点の場合には，極の場合と違って，複素平面において特異点の周りで解は一価関数にはならないという問題がある．常微分方程式の解が一価関数でないとき，その方程式に基づいて新しい超越関数を定義するのは困難である．そのため，解が動く分岐点を持たない微分方程式を調べることは 19 世紀後半に活発な研究課題になった．ここで重要とされている**すべての解は動く分岐点を持たない**という性質を**パンルヴェ性**と呼ぶ．

1 階代数的常微分方程式 $P(z, y, y') = 0$[*7)] は L. Fuchs, H. Poincaré と P. Painlevé によって系統的に考察された．その結果，パンルヴェ性を持つ方程式は，y' の次数が 1 である場合リカッチ方程式のみであり，y' の次数が 2 以上であるとき，ワイエルストラスの $\wp$ 関数で書ける一般解を持つ方程式に限ることが示された[*8)]．

P. Painlevé と B. Gambier がこの問題の 2 階代数的方程式への拡張を考察し，次の定理を得た：

定理 $y'' = R(z, y, y')$[*9)] が動く分岐点を持たないなら，その方程式は次の方程式のいずれかに帰着する．

- **i)** 求積可能な方程式．
- **ii)** 線形方程式．
- **iii)** 楕円関数で解ける方程式．
- **iv)** $P_I \sim P_{VI}$ の「パンルヴェ方程式」のどれか．

4. Ablowitz, Ramani と Segur の予想

ここで，KdV 方程式に対してもう一つの簡約を考えたい．KdV 方程式は以前に紹介したもの以外にも次の対称性を持つ： $u(x, t)$ が KdV の解であれば，$u(x - 6\varepsilon t, t - \varepsilon/2) + \varepsilon$ も解である．このような変換の下で不変である解 $u(x, t)$ は，次の常微分方程式を満たす関数 $g(z) = t - \frac{1}{2}u(x, t)$, $z = x - 6t^2$ で表せる．

$$g'' = 6g^2 + z. \tag{10}$$

これは前節で説明した Painlevé らの分類の P_I 方程式である．

振り返ってみると，今まで紹介した KdV 方程式や mKdV 方程式の対称性による簡約はすべてパンルヴェ性を持つ方程式である．この不思議な現象に気がついた M. Ablowitz, A. Ramani と H. Segur が前世紀の 70 年代後半に次の予想を提出した．

ARS 予想： Lax pair を持つ可積分系から厳密な簡約で得られる常微分方程式は必ずパンルヴェ性を持つ．

この予想は既に当時に KdV タイプの Lax pair に対応する可積分系から相似簡約で得られる常微分方程式の場合には証明されたが，一般の証明は現在でも知られていない．相似簡約で得られる常微分方程式はパンルヴェ性以外にも興味深い性質を持っている．相似簡約と全く関係ない P_I は決して大した対称性を持たな

*6) 積分定数 C は，$z = z_0$ で初期値 $y(z_0) = y_0$ を与えるとき，$C = z_0 + y_0^{-n}$ で定められる．

*7) $P(z, y, y')$ は z の解析関数を係数とする y と y' の多項式である．

*8) (2) はこれに当てはまる方程式である．

*9) $R(z, y, y')$ は z の解析関数を係数とする y と y' の有理関数である．

いのだが*10), 例えば mKdV 方程式の相似簡約として得られた $P_{\rm II}$ は非常に優れた対称性を持つ．次の（ほとんど自明な）対称性の他，

$$\pi:\quad w \to -w,\quad \alpha \to -\alpha,$$

かなり非自明なものがある．

$$S:\quad w \to w + \frac{\alpha}{w' + w^2 + s/2},\quad \alpha \to -1-\alpha.$$

ところで，$\pi^2 = 1 = S^2$ であり，変換 π と S が $A_1^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群を生成し，この変換群は KdV 方程式のダルブー変換と密接な関係をもつ．$P_{\rm I}$ 以外のパンルヴェ方程式の対称性がいつもアフィン・ワイル群を生成するという不思議議な事実に気づいたのは岡本和夫である[3,4]．

5. τ 関数のダルブー・チェーン

パンルヴェ方程式の対称性が方程式とともに適切な可積分系から得られるのではないかという発想は，90 年代の前半にまず V.E. Adler と J. Schiff の結果[5,6]をもたらし，そして日本では野海・山田の結果[7]を生み，パンルヴェ方程式に関する研究を大きく変えた．そのお陰で，可積分系とパンルヴェ方程式の本質的な関係がもう少し広い観点から説明できるようになった．その観点は，可積分系の様々な様相を統一的に説明する佐藤理論が与える．佐藤理論の要となっているのは，無限個の独立変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ に依るタウ関数 $\tau(\boldsymbol{x})$ である．この τ 関数は佐藤幹夫に導入された普遍グラスマン多様体，または $GL(\infty)$ という無限次元 Lie 代数の表現と関連するものである[8]．その関係を詳しく説明するには相当の紙数が必要であるから，詳細は完全に省略して **KP 階層**に関する佐藤理論を簡単に紹介していこう．

KP 階層における τ 関数を次の恒等式をすべての $l = 0, 1, 2, \dots$ に対して満足する関数 $\tau_n(\boldsymbol{x})$ とする．

$$\operatorname*{Res}_{\lambda}\Big[\lambda^l\,\tau_{n+l}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda)\,\tau_n(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda) \times e^{\sum_{n\ge1}(x_n - x_n')\lambda^n}\Big] = 0.$$

ここで，任意の 0 でない複素数 λ に対して $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda := \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{2\lambda^2}, \frac{1}{3\lambda^3}, \dots\right)$ を導入し，$\operatorname*{Res}_{\lambda}$ という記号で次の形式的な留数を表す：$\operatorname*{Res}_{\lambda}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\lambda^k\right] := a_{-1}$．他の可能性もあるのだが，ここでは $\tau_n(\boldsymbol{x})$ が n 次ロンスキ行列式 $\tau_n(\boldsymbol{x}) = \left|\partial_{x_1}^{n+j-1}\varphi_i\right|_{i,j=1,..,n}$ であると思っても構わない*11)．

$l = 0$ のときに上記の恒等式の中身を母関数のように展開し，留数を計算すると $\tau_n(\boldsymbol{x})$ が満たすべき無限個の可積分な偏微分方程式が得られる．その中で最も根本的な方程式は有名な KP 方程式の双線形形式

$$\left(4D_{x_1}D_{x_3} - D_{x_1}^4 - 3D_{x_2}^2\right)\tau_n\cdot\tau_n = 0 \qquad (11)$$

であるので，階層全体にもこの呼称がつけられている．$(f, g) \mapsto D_z^k f\cdot g$ 等の作要素はこの分野でよく使用されている広田微分である．

$$D_x^p D_y^q f\cdot g = \partial_\nu^p\partial_\eta^q f(x+\nu, y+\eta)g(x-\nu, y-\eta)\Big|_{\substack{\nu=0\\ \eta=0}}.$$

これらの作用は符号付きのライプニッツ則と等しい：$D_x f\cdot g = f_x g - f g_x$, $D_x D_y f\cdot g = f_{xy}g - f_x g_y - f_y g_x + f g_{xy}$ など．

$l \ge 1$ の場合には，上記の恒等式から得られるのは異なる τ 関数の間に成り立つ方程式である．なお，$\tau_n(\boldsymbol{x})$ が KP τ 関数であれば，$l = 1$ における関係式でその τ_n と結ばれている τ_{n+1} がまた KP τ 関数であることが証明できる．考えてみると，これらの関係式が KP τ 関数の間の写像 $\tau_n \mapsto \tau_{n+1}$ を定める．この写像は KP 階層におけるダルブー変換に他ならない．以下このダルブー変換の反復で，任意の $\tau_n(\boldsymbol{x})$ から構成できる τ 関数のチェーンを考えていこう．

$$\tau_n \to \tau_{n+1} \to \cdots \to \tau_{n+k} \to \cdots.$$

このようなチェーンをダルブー・チェーンと呼ぶ．ダルブー・チェーンにおいて，隣どうしの τ 関数の間に成り立つ関係式の中で一番簡単なものは次の方程式である．

$$\left(D_{x_2} - D_{x_1}^2\right)\tau_{n+1}\cdot\tau_n = 0. \qquad (12)$$

KP 階層について紹介すべきことがもう一つ残っている．それは τ 関数の基本的な対称性である．実は，ある特別な変換を用いると，ダルブー・チェーンに含まれている $\tau_j(\boldsymbol{x})$ から全く新しい τ 関数を作ることができる．具体的には，一般のダルブー・チェーンにおける組 $(\tau_{j-1}, \tau_j, \tau_{j+1})$ に対して，次のような完全微分形式 $d\Omega_j$ が存在することが知られている．

$$d\Omega_j = \sum_{k\ge1}\omega_k(\boldsymbol{x})dx_k$$

最初の係数 ω_1 と ω_2 は次の具体的な形*12)をとる：

*10) $g(z)$ が (10) の解であれば $\omega^{-3}g(\omega z)$, $\omega^5 = 1$ がまた解であるような対称性しかあげられない．

*11) $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ は $\forall i, k : \partial_{x_k}\varphi_i = \partial_{x_1}^k\varphi_i$ を満たす関数である．

*12) チェーンの基本関係式 (12) から $(\omega_1)_{x_2} = (\omega_2)_{x_1}$ はすぐ確認できる．一般的には，$(\omega_i)_{x_k} = (\omega_k)_{x_i}$ が成立する．

$\omega_1 = \frac{\tau_{j+1}\tau_{j-1}}{\tau_j^2}$, $\omega_2 = \frac{(\tau_{j+1})_{x_1}\tau_{j-1}-\tau_{j+1}(\tau_{j-1})_{x_1}}{\tau_j^2}$. KP 階層における τ 関数の最も基本的な対称性[*13)]はこの完全微分形式に対応するポテンシャル Ω_j を用いて次のように表せる：τ_n が KP τ 関数であれば,

$$\tau_n \mapsto \tau_n\,\Omega_n \tag{13}$$

によって得られる $\widehat{\tau}_n := \tau_n\,\Omega_n$ はまた KP τ 関数である．以降，この変換をバイナリー変換と呼ぶ．

予備的な説明はこれで終わった．最後の節では，KP 階層とパンルヴェ方程式との本質的な関係について説明していこう．

6. 周期的ダルブー・チェーンと相似簡約

以降周期的なダルブー・チェーンを考えよう．ただし，チェーンの τ 関数に適切な条件を課さないと自明なものしか得られない．具体的に言えば，周期 l（$l \geq 2$）の非自明なダルブー・チェーンが存在するための必要十分条件は，そのチェーンを構成する τ 関数がすべて **l-簡約の τ 関数**であることである．l-簡約の τ 関数とは，各々の $m = l, 2l, 3l, \ldots$ に対して $\frac{\partial}{\partial x_m}\ln\tau(\boldsymbol{x})$ が定数となるような τ 関数である．ところで，$l = 2$ のとき，τ_{x_2} が $\tau(\boldsymbol{x})$ の定数倍である τ 関数はどのような微分方程式を満たすか，つまり KP 方程式の 2-簡約はどういう方程式であるのかを考えて見ると，KdV の双線形形式が現れる．

$$\left(4D_{x_1}D_{x_3} - D_{x_1}^4\right)\tau_n\cdot\tau_n = 0.$$

ようするに，x_3 の代わりに $t = -x_3/4$ を導入し，上記の双線形形式を新しい従属変数

$$u(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\ln\tau_n \tag{14}$$

で書き直すと KdV 方程式が得られるわけである．同様に，ダルブー・チェーンの基本的な関係式 (12) の 2-簡約は次の方程式である．

$$D_{x_1}^2\tau_{n+1}\cdot\tau_n = C\,\tau_{n+1}\tau_n.$$

定数 C が 0 である場合，変数変換 (14) の他にも

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_1}\ln\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \tag{15}$$

を導入すると，$u(x,t)$ と $v(x,t)$ の間に (6) の Miura 変換が成り立つ．そこで，ダルブー・チェーンを周期的にする簡約に相似簡約を加えると KP τ 関数と $\mathrm{P_{II}}$ 方程式，または $l > 2$ の場合には他のパンルヴェ方程式との関係が明らかになる可能性が見えてくる．しかし，周期 2 のチェーンはある意味で短か過ぎるのでその関係の一般性が見えてこない．そこで，周期 3 のチェーンを考えてみよう．

$l = 3$ のとき，すべての $m = 3, 6, 9, \ldots$ に対して $\frac{\partial}{\partial x_m}\ln\tau(\boldsymbol{x})$ が定数であり，チェーンの τ 関数の間に相変わらず $\left(D_{x_2} - D_{x_1}^2\right)\tau_{k+1}\cdot\tau_k = 0$ $(k, k+1 \mod 3)$ が成り立つ．この方程式は $x_{k\geq 2}$ の独立変数に依存しないため，チェーンの τ 関数の X_1X_2 平面への制限を考え，その平面上で相似簡約を施す．すなわち，周期的なチェーンの τ 関数をさらに，任意のパラメータ μ に関して次の対称性を持つ関数に限る．$^{\exists}K_k(\mu)$:

$$\tau_k(\mu x_1, \mu^2 x_2, 0, \ldots) = K_k\,\tau_k(x_1, x_2, 0, \ldots) \tag{16}$$

ただし，$K_k(\mu)$ は μ のみの関数である．これらの τ 関数をさらに直線 $x_2 = -\frac{3}{2\varepsilon}$ （$\varepsilon \neq 0$）に制限し，$\tau_k\left(x_1, -\frac{3}{2\varepsilon}\right)$ を $\tau_{[k]}(x)$（$x := x_1$）で表すと，

$$\begin{cases} \left(D_x^2 - \dfrac{\varepsilon x}{3}D_x - \kappa_0\right)\tau_{[1]}\cdot\tau_{[0]} = 0, \\ \left(D_x^2 - \dfrac{\varepsilon x}{3}D_x - \kappa_1\right)\tau_{[2]}\cdot\tau_{[1]} = 0, \\ \left(D_x^2 - \dfrac{\varepsilon x}{3}D_x - \kappa_2\right)\tau_{[0]}\cdot\tau_{[2]} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

が得られる．ここの定数 κ_k は (16) に現れる $K_k(\mu)$ から計算できる．

$$\kappa_k := \frac{\varepsilon}{3}\left(K'_k\Big|_{\mu=0} - K'_{k+1}\Big|_{\mu=0}\right) \quad (k \mod 3).$$

(17) は実は $\mathrm{P_{IV}}$ の双線形形式である．これを明らかにするためには (15) のような従属変数（$k = 1, 2, 3$）

$$g_k(x) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{\tau_{[k+1]}}{\tau_{[k-1]}}\right) - \frac{\varepsilon x}{3} \tag{18}$$

と新しいパラメータ（$k = 1, 2, 3$）

$$\alpha_k := \kappa_k - \kappa_{k-1} - \frac{\varepsilon}{3} \tag{19}$$

を導入しなければならない．結局，次の美しい対称性を持つ連立常微分方程式系を得る[*14)]．

$$\begin{cases} g'_1 = g_1(g_3 - g_2) + \alpha_1, \\ g'_2 = g_2(g_1 - g_3) + \alpha_2, \\ g'_3 = g_3(g_2 - g_1) + \alpha_3. \end{cases} \tag{20}$$

定義式 (18) からすぐ分かるように，これらの $g_k(x)$ は勿論独立ではない．すなわち，$g_1 + g_2 + g_3 = -\varepsilon x$ を用いて，例えば，g_3 を消去し，残りの方程式を $y(z) := \gamma g_1(x)$, $z = x/\gamma$ ($\gamma^2 = 2/\varepsilon$) に対する 2 階常微分方

*13) ここで定義されるバイナリー変換は対称群 $GL(\infty)$ の普遍グラスマン多様体上の一般的な作用に相当するものである．

*14) この $\mathbf{P_{IV}}$ **の対称形式**と呼ばれている系は何回も発見や再発見されたものだが，初めて登場したのは，P. Painlevé の結果がほとんど忘れ去られた頃に長年パンルヴェ方程式への興味を燃え立たせた F. Bureau の 1980 年の論文だ．

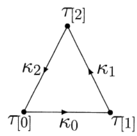


図 2　$\mathrm{P_{IV}}$ に対応するダルブー・チェーン．それぞれの矢印は (17) の具体的な方程式をを表す．

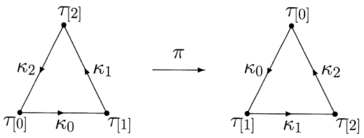


図 3　$\mathrm{P_{IV}}$ に対応するダルブー・チェーンの対称性．

程式として表すと，$\mathrm{P_{IV}}$ の標準的な形が現れてくる．

$$y'' = \frac{1}{2y}\left(y'\right)^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 + 2(z^2-a)y + \frac{b}{y}. \quad (21)$$

ただし，$a = 1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)/\varepsilon$, $b = -2\alpha_1^2/\varepsilon^2$ である．ところで，この結果により，$\mathrm{P_{IV}}$ の解

$$y(z) = \frac{\partial}{\partial z}\ln\left(\frac{\tau_{[2]}}{\tau_{[0]}}\,e^{-z^2/3}\right)$$

が τ 関数で記述できるようになるばかりでなく，実は，$\mathrm{P_{IV}}$ の対称性もこうした流れで KP 階層における対称群の簡約として記述できるようになる．まず $\mathrm{P_{IV}}$ に対応するダルブー・チェーンを図 2 のように表す．この図から，図 3 で表した変換

$$\pi\ :\ (\tau_{[k]}, \kappa_k) \mapsto (\tau_{[k+1]}, \kappa_{k+1}) \quad (22)$$

（$k \mod 3$）が対称性であることはすぐ分かる．すなわち，$y(z)$ がパラメータ (a,b) に対応する $\mathrm{P_{IV}}$ の解であれば，$\widetilde{y}(z) = \gamma g_2 = \frac{y'-2\alpha_1/\varepsilon}{2y} + \frac{1}{2}y + z$ がパラメータ $(-1-(2\alpha_1+\alpha_2)/\varepsilon, -2\alpha_2^2/\varepsilon^2)$ に対する $\mathrm{P_{IV}}$ 方程式を満たす．なお，ダルブー・チェーンの周期性による 3-簡約のお陰で，チェーンの τ 関数に作用するバイナリー変換を定める Ω_k が陽な形をとる．

$$\alpha_k\,\Omega_k \equiv \tau'_{[k+1]}\tau_{[k-1]} - \tau_{[k+1]}\tau'_{[k-1]} - \frac{\varepsilon x}{3}\tau_{[k+1]}\tau_{[k-1]}. \quad (23)$$

つまり，前節の微分形式に対応するポテンシャルは，$\alpha_k \neq 0$ のとき[*15)]，明白にダルブー・チェーンを構成する τ 関数で定められている．これらの Ω_k を用いて，次の変換が周期的なダルブー・チェーンを新たな周期的なダルブー・チェーンに写す．

$$S_k\ :\ \begin{aligned}&(\tau_{[k]},\,\alpha_k) \mapsto \left(\tau_{[k]}\Omega_k,\ -\alpha_k\right),\\ &(\tau_{[k\pm1]},\,\alpha_{k\pm1}) \mapsto \left(\tau_{[k\pm1]},\,\alpha_{k\pm1}+\alpha_k\right).\end{aligned} \quad (24)$$

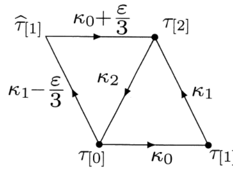


図 4　S_1 のダルブー・チェーンへの作用．

例えば，図 4 に描かれているように，S_1 をダルブー・チェーンに作用させると，$\tau_{[0]}$ と $\tau_{[2]}$ は不変であり，$\tau_{[1]}$ が $\widehat{\tau}_{[1]} := \tau_{[1]}\Omega_1$ に変わるにも関わらず，$\tau_{[0]}, \widehat{\tau}_{[1]}$ と $\tau_{[2]}$ の間に相変わらずダルブー・チェーンの関係が成り立つ．実際は，これらの対称性 S_k が以前得られた対称性 π に加えて $A_2^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群を生成することも知られている[*16)]．

$$\pi^3 = S_k^2 = 1,\ \ \pi S_{k+1} = S_k\pi,\ \ \left(S_{k+1}S_k\right)^3 = 1.$$

これは，KP 階層の対称群 $GL(\infty)$ が相次ぐ簡約の結果で，結局このようなアフィン・ワイル群まで絞られているという意味と考えられる．実は，より長いダルブー・チェーンの場合にも同じことが言える．特に，周期 4 の場合には $\mathrm{P_V}$ とその方程式の様々な対称性が得られる．

パンルヴェ方程式の対称性以外にも，例えば，多項式解から特殊解が構成できる等，KP 階層の理論からパンルヴェ方程式に関する情報はたくさん得られる．本記事ではそれらについて何も触れられなかったが，パンルヴェ方程式の特殊解と可積分系から導かれる対称性との関係については野海正俊氏の本で非常に詳しく分かりやすく説明されている[9)]．この記事であまり触れていないトピックスは他にもたくさんあるので，以下の参考文献を参照していただきたい．

参考文献

1) 武部尚志「数理科学」2009 年 3 月号，p.23–29.
2) M.J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM (1981).
3) 坂井秀隆「数理科学」2009 年 3 月号，p.30–35.
4) 岡本和夫『パンルヴェ方程式』岩波書店 (2009).
5) V.E. Adler, "Nonlinear chains and Painlevé equations", *Physica D* **73** (1994) 335–351.
6) J. Schiff, "Bäcklund transformations of MKdV and Painlevé equations", *Nonlinearity* **7** (1994) 305–312.
7) M. Noumi, Y. Yamada, "Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials", *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 53–86.
8) 三輪哲二，神保道夫，伊達悦朗『ソリトンの数理』（新版）岩波書店 (2007).
9) 野海正俊，『パンルヴェ方程式』，朝倉書店 (2000).

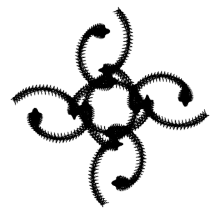
（ラルフ・ウィロックス，東京大学大学院数理科学研究科）

*15)　$\alpha_k = 0$ の場合には別の議論が必要である．

*16)　変換 (24) のパラメータ α_k への作用は明らかに $A_2^{(1)}$ 型のルート系に対応するワイル群と等しい．

可積分系と幾何学

等位集合の形と代数幾何



井上　玲

1. はじめに—等位集合の“形”

1.1 調和振動子

最も簡単な可積分系の一つ**一次元調和振動子**を思い出してみましょう．バネ定数 $k(>0)$ の線形バネにつながれて一直線上を運動する質点（質量 1）の変位 x が満たす運動方程式は

$$x'' = -kx \tag{1}$$

と書けます（$'$ は時間変数 t の微分を表します）．この方程式の一般解は

$$x = a\sin(wt+\theta) \quad (w^2 = k)$$

と求まり，x と x' の初期値を与えると $a, \theta \in \mathbb{R}$ が定まります．

少し視点を変えてこの問題を見直します．$p = x'$ とおくと (1) は相空間 $M = \{(x,p)\} \simeq \mathbb{R}^2$ 上の 1 階の微分方程式の組

$$x' = p, \quad p' = -kx$$

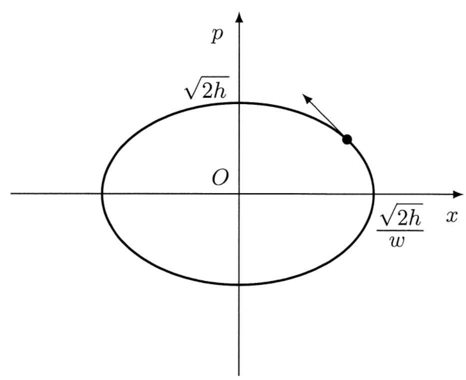
となり，1 つの保存量

$$H(x,p) = \frac{1}{2}(p^2 + kx^2)$$

を持ちます．$h \in \mathbb{R}$ に対し，M の部分集合で $H(x,p) = h$ となる (x,p) の集まり M_h を**等位集合**と呼びます．$h > 0$ のとき M_h は xp 平面内の楕円になります．対応する解

$$(x,p) = \sqrt{2h}\left(\frac{1}{w}\sin(wt+\theta), \cos(wt+\theta)\right)$$

はこの楕円上の関数です（下図）．



他にもコマ，惑星の運動のような $\mathbb{R}$ 上の有限次元系には周期運動を解に持つものがあり，それらの系の等位集合はコンパクトな多様体になっています[1,8]．

1.2 周期戸田格子

戸田格子は非線形バネでつながった一次元格子の系で，質点の変位 x_n $(n \in \mathbb{Z})$ は次の運動方程式を満たします[9]:

$$x_n'' = \mathrm{e}^{x_{n+1}-x_n} - \mathrm{e}^{x_n - x_{n-1}}. \tag{2}$$

このような非線形微分方程式は解けるとは限りませんが，戸田格子はたくさんの保存量を持っていて“解ける”ことが分かっている代表的な可積分系の一つです．

本稿で焦点をあてるのは $\mathbb{C}$ 上の $(g+1)$ 周期

戸田格子 ($x_n \in \mathbb{C},\ x_{n+g+1} = x_n$) です．以後，変数を $a_n = x'_n,\ b_n = \mathrm{e}^{x_{n+1}-x_n}$ と取り直し，(2) を相空間 M:

$$\left\{ (a_n, b_n)_{n=1,\cdots,g+1} \,\middle|\, d := \prod_{n=1}^{g+1} b_n = 1 \right\} \subset \mathbb{C}^{2g+2}$$

上の 1 階の微分方程式の組

$$\begin{cases} a'_n = b_n - b_{n-1}, \\ b'_n = b_n(a_{n+1} - a_n) \end{cases} \tag{3}$$

($n \in \mathbb{Z}/(g+1)\mathbb{Z}$) に書き換えます．

準備体操を兼ねて 2 周期格子 ($g = 1$) の等位集合の形を調べてみましょう．この系の独立な保存量は

$$c_1 = a_1 + a_2, \quad c_0 = a_1 a_2 - b_1 - b_2,$$
$$d = b_1 b_2 (= 1)$$

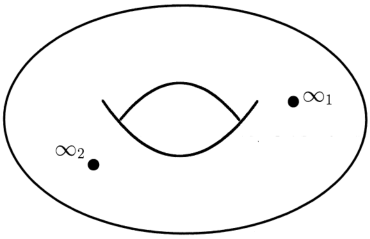
の 3 つです．$c = (c_0, c_1)$ の値を固定して a_2, b_1 を消去すると a_1 と b_2 の関係式

$$b_2^2 + b_2(a_1^2 - a_1 c_1 + c_0) + 1 = 0$$

が得られます．これが等位集合 M_c を与える方程式です．一方，方程式

$$y^2 + y(x^2 + x c_1 + c_0) + 1 = 0$$

が定める完備代数曲線を γ_c とおくと $(-a_1, b_2)$ は γ_c 上の点であることが分かります．γ_c は滑らかなとき楕円曲線で，2 つの無限遠点 ∞_1, ∞_2 を持ちますが，$(-a_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$ はこの 2 点を取ることができません．従って等位集合 M_c は $\gamma_c \setminus \{\infty_1, \infty_2\}$ に同型なのです．絵で描くと，M_c はドーナツの表面から 2 点を除いた非コンパクトな多様体です（下図）：



方程式 (3) の解は楕円関数を使って書かれ，この多様体上の正則関数になります．

$g \geq 2$ では等位集合の形はずっと複雑になり，もはや上のような初等的な解析はできません．ではどうするのか…本稿では，代数幾何の手法を使って戸田格子の等位集合の形と解を記述する方法を紹介します．2 節へ進みましょう．

2. 周期戸田格子と代数幾何

2.1 Lax 行列とスペクトル曲線

方程式 (3) は次の 2 つの行列 $L(y), B(y)$:

$$L(y) = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & (-1)^g \frac{b_{g+1}}{y} \\ b_1 & a_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{g-1} & a_g & 1 \\ (-1)^g y & & & b_g & a_{g+1} \end{pmatrix},$$

$$B(y) = \begin{pmatrix} 1 & & & (-1)^g \frac{b_{g+1}}{y} \\ b_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b_{g-1} & 1 & \\ & & & b_g & 1 \end{pmatrix}$$

の満たす方程式

$$L(y)' = L(y)\,B(y) - B(y)\,L(y)$$

に書き直すことができます．この方程式を **Lax 方程式**，$L(y)$ を **Lax 行列**と呼びます．戸田格子の Lax 形式は 1970 年代に Flaschka によって発見されました[*1]．

Lax 方程式の恩恵は，$L(y)$ の固有多項式

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y \,\mathrm{Det}(x\,\mathbb{I}_{g+1} + L(y)) \\ &= y^2 + y(x^{g+1} + c_g x^g + \cdots + c_0) + d \end{aligned}$$

の係数が (3) の保存量になることです．$(g+2)$ 個の係数 $c_0, c_1, \cdots, c_g, d$ は相空間 M 上の独立な多項式関数で，$c = (c_0, c_1, \cdots, c_g, d = 1) \in \mathbb{C}^{g+2}$

*1) 本稿ではオリジナルと少し異なる変数変換と Lax 形式を用います．

の値を固定する毎に，等位集合

$$M_c=\{m \in M \mid c_k(m)=c_k\ (k=0,\cdots,g)\}$$

とスペクトル曲線 γ_c，つまり $f(x,y)=0$ が定める完備代数曲線が決まります．

2.2 Jacobi 多様体と Riemann テータ関数

等位集合 M_c とスペクトル曲線 γ_c の関係を調べることで戸田格子が解けていくのですが，そのために必要な代数幾何の言葉を用意します[7,10]．

γ_c が滑らかな曲線のとき，γ_c は**超楕円曲線**と呼ばれる種数 g の Riemann 面で 2 つの無限遠点 ∞_1, ∞_2 を持っています．この Riemann 面上には $2g$ 個の独立なサイクル α_k, β_k $(k=1,\cdots,g)$ と g 個の独立な正則 1 形式 ω_k $(k=1,\cdots,g)$ があります．条件

$$\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}$$

で規格化した ω_k を用いて**周期行列** $\Omega_c \in M_g(\mathbb{C})$ を定義します：

$$(\Omega_c)_{ij} = \int_{\beta_i} \omega_j.$$

このとき γ_c の **Jacobi 多様体** $\mathrm{Jac}(\gamma_c)$ は g 次元複素トーラス

$$\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g+\Omega_c\mathbb{Z}^g)$$

に同型です．

γ_c 上の点 P_0 を固定し，γ_c から $\mathrm{Jac}(\gamma_c)$ への写像 ψ を

$$\psi : P \mapsto \left(\int_{P_0}^{P} \omega_i\right)_{i=1,\cdots,g} \tag{4}$$

で定義します．ここから誘導される写像

$$\psi^k : \gamma_c^k/S_k \to \mathrm{Jac}(\gamma_c)$$

（S_k は k 次対称群）は $k \geq g$ のとき全射になることが知られています．本稿では $P_0=\infty_1$ と選び，**テータ因子** Θ を ψ^{g-1} の像と定義します．Θ は $\mathrm{Jac}(\gamma_c)$ の $(g-1)$ 次元部分多様体です．後の便宜のために Θ を $\mathrm{Jac}(\gamma_c)$ 内で平行移動させた多様体

$$\Theta_k = \Theta + k\cdot\psi(\infty_2), \quad k \in \mathbb{Z}$$

を定義しておきます．特に $\Theta_0=\Theta$, $\Theta_{g+1+k}=\Theta_k$ が成り立ちます．

Riemann テータ関数 $\theta(z;\Omega_c)$ は

$$\theta(z;\Omega_c) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{-1}m\cdot(\Omega m+2z)}$$

で定義される $z \in \mathbb{C}^g$ の擬周期関数です．$\theta(z;\Omega_c)$ のゼロ点集合が定める $\mathrm{Jac}(\gamma_c)$ の部分多様体は Θ の平行移動になることが知られています．

2.3 周期戸田格子の等位集合と解

$(g+1)$ 周期戸田格子は $(g+2)$ 個の独立な保存量を持つので等位集合は g 次元の代数多様体になります．γ_c が滑らかなとき，等位集合 M_c と解について以下が成り立ちます[2]：

(i) 解は Riemann テータ関数 $\theta(z)=\theta(z;\Omega_c)$ で書かれる．特に $a_n=a_n(t)$ は

$$a_* + \frac{d}{dt}\log\frac{\theta(-\eta n - vt+\delta)}{\theta(-\eta(n+1)-vt+\delta)}$$

となる．ただし $\eta=\psi(\infty_2)$ で，a_*, δ, v は初期条件から決まる．

(ii) M_c は $\mathrm{Jac}(\gamma_c)\setminus(\bigcup_{n=0}^{g}\Theta_n)$ に同型である．

解の分母に現れる $\theta(-\eta n - vt+\delta)$ $(n=1,\cdots,g+1)$ たちのゼロ点集合が $\mathrm{Jac}(\gamma_c)$ から除かれる Θ_n たちに対応しています．写像 $M_c \hookrightarrow \mathrm{Jac}(\gamma_c)$ は**固有ベクトル写像**と呼ばれる，Lax 行列を持つ系に特有の写像です．

$g=1$ のとき，つまり γ_c が楕円曲線のときは特別で $\mathrm{Jac}(\gamma_c)\simeq\gamma_c$ が成り立ちます．さらに $\Theta_0=\{\psi(\infty_1)\}=\{O\}$ と $\Theta_1=\{\psi(\infty_2)\}$ は $\mathrm{Jac}(\gamma_c)$ のゼロ次元部分多様体ですから，1.2 節で調べた $g=1$ の例では $M_c\simeq\mathrm{Jac}(\gamma_c)\setminus(\Theta_0\cup\Theta_1)$ となることが見えたのです．

$g=2$ のとき固有ベクトル写像を詳しく見てみましょう．$(a_n,b_n)_{n=1,2,3}\in M_c$ に対し，Lax 行列 $L(y)$ の固有値 $-x$ を持つ固有ベクトル $\phi(x,y)=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$ は

$$\phi_1 = \mathrm{Det}\begin{pmatrix}\frac{b_3}{y} & 1\\ 1 & a_2+x\end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1+x & \frac{b_3}{y} \\ b_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = -\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1+x & 1 \\ b_1 & a_2+x \end{pmatrix}$$

と書けます．$\phi(x,y)$ の零点を与える γ_c 上の点を求めると，方程式

$$\begin{aligned} &x_1+x_2=-a_1-a_2, \\ &x_1x_2=a_1a_2-b_1, \\ &y_i=b_3(x_i+a_2) \quad (i=1,2) \end{aligned} \tag{5}$$

の解として 2 点 $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$ を得ます．この 2 点から $\psi^2(P_1+P_2)\in \mathrm{Jac}(\gamma_c)$ を定めます．式 (5) から P_1,P_2 が無限遠点にならないことはすぐに分かり，さらに ψ^2 の性質から (ii) が証明できます．(i) の解は固有ベクトル写像の逆写像を与えます．

このように戸田格子と代数曲線の理論は大変相性が良いのです．この相性は 3 節の**超離散化**の世界へ引き継がれます．

3. 超離散周期戸田格子とトロピカル幾何

3.1 超離散化

正の微小パラメータ ε によるスケール変換を伴う次のような極限操作を**超離散化**と呼びます．$\varepsilon>0$ と $a,b,c\in\mathbb{R}_{>0}$ に対し $a=\mathrm{e}^{-\frac{A}{\varepsilon}}, b=\mathrm{e}^{-\frac{B}{\varepsilon}}, c=\mathrm{e}^{-\frac{C}{\varepsilon}}$ とします．このとき等式 $c=a+b$ は $A,B,C\in\mathbb{R}$ の等式

$$C=-\varepsilon\log\left(\mathrm{e}^{-\frac{A}{\varepsilon}},\mathrm{e}^{-\frac{B}{\varepsilon}}\right)$$

に書き換えられ，さらに $\varepsilon\to 0$ の極限を取ると $C=\min[A,B]$ が得られます．同様にして $\mathbb{R}_{>0}$ 上の演算 $\times,\div$ の超離散化も計算でき，まとめると

$$\begin{aligned} &a+b=c\to\min[A,B]=C, \\ &a\times b=c\to A+B=C, \\ &a\div b=c\to A-B=C \end{aligned} \tag{6}$$

となります．演算 $-$ は $\mathbb{R}_{>0}$ 上で閉じていないため考えません．

半群 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 上の "min, +, −" の演算で定義される代数を **min-plus 代数**と呼びます[*2]．式 (6) から分かるように，$\mathbb{R}_{>0}$ 上の演算 $+,\times,\div$ で生成される代数と min-plus 代数は超離散化でつながっています．

3.2 超離散周期戸田格子

超離散周期戸田格子とは，相空間 M^{trop}:

$$\left\{(Q_n,W_n)_{n=1,\cdots,g+1}\in\mathbb{R}^{2g+2}\ \middle|\ \sum_{n=1}^{g+1}Q_n<\sum_{n=1}^{g+1}W_n\right\}$$

上の区分線形方程式

$$\begin{aligned} Q_n^{t+1}&=\min[W_n^t,Q_n^t+X_n^t], \\ W_n^{t+1}&=Q_{n+1}^t+W_n^t-Q_n^{t+1}, \\ X_n^t&=\min_{k=0,\cdots,g}\left[\sum_{l=1}^{k}(W_{n-l}^t-Q_{n-l}^t)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

$(t\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}/(g+1)\mathbb{Z})$ で与えられる系です[4]．詳細は述べませんが，(7) は広田と辻本によって 1990 年代に導入された離散戸田格子（(3) の時間微分を差分化した方程式）の超離散化です．

この超離散周期戸田格子を調べるのに，次に紹介する**トロピカル幾何**を使います．

3.3 トロピカル幾何

トロピカル幾何は今世紀に入って提唱された組合せ的な代数幾何で，min-plus 代数（または max-plus 代数）で記述されます[5]．トロピカル曲線は以下のように代数曲線の超離散化として解釈できます．

$\mathbb{C}^2$ 上の方程式

$$y+x+c=0 \quad (c\in\mathbb{R}_{>0})$$

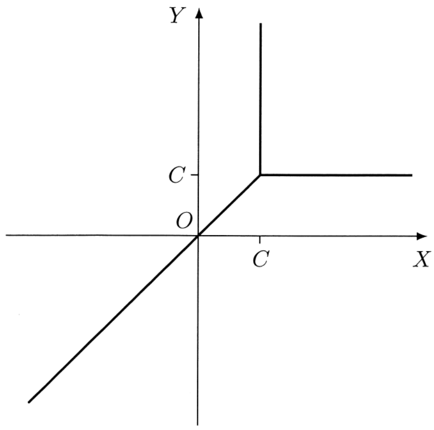
で表される直線を l とします．$\varepsilon>0$ 毎にスケール変換 $|x|=\mathrm{e}^{-\frac{X}{\varepsilon}}, |y|=\mathrm{e}^{-\frac{Y}{\varepsilon}}, c=\mathrm{e}^{-\frac{C}{\varepsilon}}$ で定まる $\mathbb{R}^2$ 内の領域を

$$L_\varepsilon=\{(-\varepsilon\log|x|,-\varepsilon\log|y|)\mid(x,y)\in l\}$$

---

*2) 半群 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 上で "min" の代わりに "max" を使う代数が max-plus 代数です．

とおくと，直線 l の超離散化は $\bigcap_{\varepsilon>0} L_\varepsilon$ で定まる下図のようなグラフです：



これがトロピカル直線で，次の定義が与える $\mathbb{R}^2$ 上のグラフと一致します：

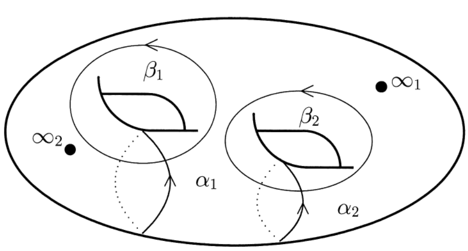
$$\{(X,Y) \mid \min[X,Y,C] \text{ の微分不可能点}\}.$$

微分不可能点とは $Z=\min[X,Y,C]$ の定める $\mathbb{R}^3$ 内の凸体の**折れ線**のことです．このように，$\mathbb{C}^2$（xy 平面）上のゼロ点は，トロピカルの世界では $\mathbb{R}^2$（XY 平面）上の凸体の折れ線を $\mathbb{R}^2$ に射影したものになります．

次に $\mathbb{C}^2$ 内の代数曲線 γ

$$y^2+(x^3+x^2+c_1x+c_0)y+d=0$$

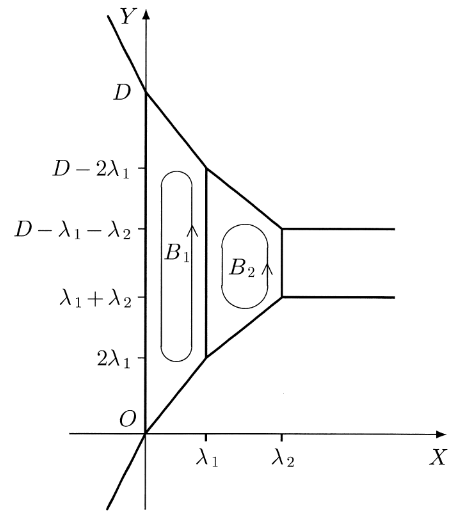
（ただし $c_1, c_0, d \in \mathbb{R}_{>0}$）を考えてみましょう．$\gamma$ は滑らかなとき種数 2 の超楕円曲線で，下図のような形をしています：



γ の超離散化を行うと

$$\begin{aligned}\min[2Y, &Y+3X, Y+2X,\\ &Y+X+C_1, Y+C_0, D]\end{aligned} \tag{8}$$

の微分不可能点で表されるトロピカル曲線 Γ が得られます．適当な (C_1, C_0, D) を取ると Γ は 2 つのサイクルを B_1, B_2 を持つグラフになります（下図）：



ここで $\lambda_1 = C_1, \lambda_2 = C_0 - C_1$ としています．式 (8) より，すべての辺の傾きは必ず互いに素な整数の組で表されます．

超離散化によって γ のサイクル α_1, α_2 は Γ では潰れて見えなくなり，サイクル β_1, β_2 が B_1, B_2 になります．Γ のサイクル数 2 が Γ の種数です．

Mikhalkin と Zharkov は，大変上手い方法でトロピカル曲線に対する写像 (4) を定義し，トロピカル Jacobi 多様体の理論を作りました[6]．一般に種数 g の “滑らかな” トロピカル曲線 Γ は g 次実正方行列の周期行列 K を持ち，Jacobi 多様体 $J(\Gamma)$ は g 次元実トーラス

$$J(\Gamma) = \mathbb{R}^g / K\,\mathbb{Z}^g, \tag{9}$$

トロピカルテータ関数 $\Theta(Z;K)$ は

$$\Theta(Z;K) = \min_{m\in\mathbb{Z}^g} m\cdot\left(\frac{1}{2}Km+Z\right)$$

と定義される $Z \in \mathbb{R}^g$ の擬周期関数です．

複素代数曲線の場合に周期行列を計算するのは大変ですが，トロピカル曲線の場合は容易に手で計算できます．Mikhalkin らの理論を使うと，先ほどのトロピカル曲線 Γ の周期行列 K は正定値対称な 2 次実正方行列

$$K=\begin{pmatrix}2D-2\lambda_1 & -D+4\lambda_1\\ -D+4\lambda_1 & 2D-8\lambda_1\end{pmatrix} \qquad (10)$$

として求まります．

3.4 超離散周期戸田格子の等位集合と解

3.3 節と対応させながら $g=2$ の超離散周期戸田格子を見てみましょう．保存量は

$$D=\sum_{n=1,2,3}(Q_n+W_n),$$

$$C_0=\min[Q_1+Q_2+Q_3, W_1+W_2+W_3],$$

$$C_1=\min_{n=1,2,3}[Q_n+W_n, W_n+Q_{n+1}],$$

$$C_2=\min_{n=1,2,3}[Q_n, W_n]$$

の 4 つです．$C=(C_0, C_1, C_2=0, D)$ とおくと，この系のスペクトル曲線 Γ_C は (8) で与えられる Γ と同じになります．Γ_C が 3.3 節のように 2 つのサイクルを持つグラフになるとき，Γ_C のトロピカル Jacobi 多様体 $J(\Gamma_C)$ は周期行列 (10) を持つ 2 次元実トーラス (9) です．そして等位集合 M_C^{trop} について次のことが分かります[3)]：

(i) 任意の $Z_0\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$T_n^t=\Theta(Z_0-n\vec{e}_1L+\vec{\lambda}t;K),$$

$$\vec{e}_1=(1,0),\quad \vec{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2-\lambda_1)$$

と書くと一般解は次のように求まる：

$$Q_n^t=T_{n-1}^t+T_n^{t+1}-T_{n-1}^{t+1}-T_n^t,$$

$$W_n^t=T_{n-1}^{t+1}+T_{n+1}^t-T_n^t-T_n^{t+1}+D.$$

(ii) この解は $J(\Gamma_C)$ から M_C^{trop} への同型写像を与える．

面白いことに，元々の戸田格子と違って等位集合の形は $J(\Gamma_C)$ そのもの，コンパクトな多様体になっています．他の $g\in\mathbb{Z}_{>0}$ でも同様の結果が得られます．

4. むすび

周期戸田格子を例に，可積分力学系の等位集合と解が代数幾何，トロピカル幾何と関わっていく様子を紹介しました．トロピカル幾何は生まれてまだ数年ですが，代数幾何や数理物理への応用が盛んに研究されています．今後の理論の発展と面白い応用の発見を期待しています．

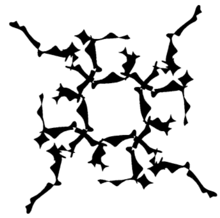
これまで議論をして下さった方々，特に 3 節の共同研究者である竹縄知之氏にお礼申し上げます．

参考文献

1) M. Audin (高崎金久訳)：『コマの幾何学』，共立出版 (2000).
2) 田中俊一，伊達悦朗：『KdV 方程式』，紀伊國屋書店 (1979).
3) R. Inoue and T. Takenawa: Tropical spectral curve and integrable cellular automata, *Int. Math. Res. Not.*, vol.2008, rnn019, 27 pp (2008) 他.
4) T. Kimijima and T. Tokihiro, Initial-value problem of the discrete periodic Toda equations and its ultradiscretization, *Inverse Problems* **18** 1705–1732 (2002).
5) G. Mikhalkin: Enumerative tropical algebraic geometry in R2, math.AG/0312530; D. Speyer and B. Sturmfels: Tropical Mathematics, math.CO/0408099, 他.
6) G. Mikhalkin and I. Zharkov: Tropical curves, their Jacobians and theta functions, math.AG/0612267.
7) D. Mumford: *Tata Lectures on Theta I*, Birkhäuser (1983).
8) 大貫義郎，吉田春夫：『力学』，岩波講座 現代の物理学 **1**，岩波書店 (1994).
9) 戸田盛和：『非線形格子力学』，応用数学叢書，岩波書店 (1987).
10) 上野健爾：『代数幾何入門』，岩波書店 (1995).

（いのうえ・れい，鈴鹿医療科学大学薬学部）

可積分アルゴリズム



中村　佳正

1. 可積分系の記述力と機能性

可積分系は数理物理の様々な局面に現れる数理モデルとしてだけでなく，「閉じた形で表す」という意味でも豊かな記述力をもち，研究者はこの記述力を利用して可積分系の背後にある数理構造を解明してきた．不思議なのは，アルゴリズムのように，元々可積分系の記述力を必要としない分野においても可積分系と見なせる微分方程式や漸化式が頻繁に現れることである[1)]．数値計算において計算量や精度といった機能性を追求すれば「可積分アルゴリズム」に行き当たる．その仕組みを解明することで，可積分系のもつ優れた機能性を新しいアルゴリズムの開発に応用できないか．このような着想で開始されたのが可積分系に基づくアルゴリズム開発の研究である[2)]．

2. 商差法と戸田方程式

絶対値が相異なる m 実根をもつ多項式

$$p(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m, \quad ({}^\forall b_k \neq 0)$$

を考える．有理関数 $1/p(z)$ のべき級数展開 $1/p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ の係数 a_n の比 $q_1^{(n)} := a_{n+1}/a_n$ は $n \to \infty$ の極限で $p(z)$ の絶対値最小の根 μ_1 に収束する．他の根についても同様な性質がある．ハンケル行列式を用いて比 $q_k^{(n)} := H_k^{(n+1)} H_{k-1}^{(n)} / H_k^{(n)} H_{k-1}^{(n+1)}$ を導入しよう．

$$H_k^{(n)} := \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+k-1} & a_{n+k} & \cdots & a_{n+2k-2} \end{vmatrix}.$$

各 $q_k^{(n)}$ は $n \to \infty$ の極限で $p(z)$ の小さいほうから第 k 番目の絶対値をもつ根 μ_k に収束する．このような性質を多項式の根の計算法として利用可能なものにするためには幾多の関門がある．

まずは計算量である．ハンケル行列式の直接的な計算を避けるにはどうしたらよいか．ルティスハウザー[3)]の卓抜したアイデアは，補助変数 $e_k^{(n)}$ を含む漸化式

$$q_k^{(n+1)} = e_k^{(n)} - e_{k-1}^{(n+1)} + q_k^{(n)}, \quad e_0^{(n)} = 0,$$
$$e_k^{(n+1)} = e_k^{(n)} q_{k+1}^{(n)} / q_k^{(n+1)}, \quad e_m^{(n)} = 0$$

によって $q_k^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ の計算を進めるというものである．各 $e_k^{(n)}$ は $n \to \infty$ の極限で 0 に収束する．除算と減算に特徴があることから，これを**商差法**と言う．

この漸化式は，適当な $m \times m$ 3 重対角行列 $A^{(n)}$ と正則な上 2 重対角行列 $R^{(n)}$ を用いて，$A^{(n)}$ の相似変換として

$$A^{(n+1)} = R^{(n)} A^{(n)} (R^{(n)})^{-1}$$

と表すことができる[2)]．さらに，$A^{(n)}$ は $n \to \infty$

の極限で初期値 $A^{(0)}$ の固有値 μ_k を対角成分とする下 2 重対角行列に収束する．

これを四則演算だけで 3 重対角行列の固有値をすべて計算する **LR 法**と言う．

さらに，ルティスハウザーは商差法の漸近挙動を調べるため漸化式の連続極限を考察し，

$$\frac{dQ_k}{dt} = E_k - E_{k-1}, \quad E_0^{(n)} = 0,$$

$$\frac{dE_k}{dt} = E_k(Q_{k+1} - Q_k), \quad E_m^{(n)} = 0$$

を導出した[4]．この方程式は今日（有限）**戸田方程式**と呼ばれる可積分系である．ルティスハウザーは多項式の根や行列の固有値を四則演算だけで効率よく計算しようと考えて可積分系に到達したのである．戸田盛和が非線形格子振動の研究において戸田格子を発見する 13 年前のことであった．

しかし，漸化式を見ればわかるように商差法はゼロに収束する変数の減算を含み，有限桁精度の計算では誤差の蓄積がひどく実用にならないとされた．LR 法は，その後，同様な相似変換を繰り返しながら行列を変形する QR 法にとって代わられ，QR 法は現代の標準解法として我々が普段使う汎用ソフトウェアにおいて広く使われている．

3. dLV 法とロトカ・ボルテラ方程式

筆者のグループでは，数理生物学に現れる可積分なロトカ・ボルテラ方程式

$$\frac{dU_k}{dt} = U_k\,(U_{k+1} - U_{k-1})$$

を取り上げ，初期値を上 2 重対角行列

$$B^{(0)} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & & \\ & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{2m-2} \\ 0 & & & b_{2m-1} \end{pmatrix}$$

によって $U_k(0) = {b_k}^2$ と与えるとき，解は

$$\lim_{t\to\infty} U_{2k-1}(t) = {\sigma_k}^2, \quad \lim_{t\to\infty} U_{2k}(t) = 0$$

なる漸近的挙動をすることを見た．定数 σ_k は行列 $B^{(0)}$ の特異値である．次に，ロトカ・ボルテラ方程式を時間変数 t について離散化した漸化式

$$u_k^{(n+1)} = \frac{1+\delta^{(n)}u_{k+1}^{(n)}}{1+\delta^{(n+1)}u_{k-1}^{(n+1)}}u_k^{(n)}, \quad \begin{array}{l} u_0^{(n)} = 0, \\ u_{2m}^{(n)} = 0 \end{array}$$

に注目する．任意の正数 $\delta^{(n)}$ について漸化式の定める数列 $u_{2k-1}^{(n)}$ は正の値を保ち，適切な初期値の設定の下で ${\sigma_k}^2$ に収束する．各 $u_{2k}^{(n)}$ は 0 に収束する．従って，この漸化式の反復計算により行列の特異値計算が実行される．これを **dLV 法**と言う[2]．漸化式に減算はなく，$1+\delta u > 1$ であるから分母が 0 に近づくこともない．dLV 法は指数関数的安定性と QR 法をしのぐ高い精度をもつ．さらに，原点シフトの導入（mdLVs 法）を経て QR 法標準ライブラリを上回る高速・高精度な特異値計算コードが開発されるに至っている．

一度は消えかけたルティスハウザーの夢が，その後の可積分系理論の発展を経て，特異値計算の dLV 法として現代によみがえってきた．可積分アルゴリズムの研究は，最近では，ハングリー型可積分系による帯行列の固有値計算法の開発[5]等へと新たな展開を見せている．

参考文献

1) 中村佳正編，『可積分系の応用数理』，裳華房，2000，第 5 章 可積分系とアルゴリズム．
2) 中村佳正著，『可積分系の機能数理』，共立出版，2006.
3) H. Rutishauser, Ein Quotienten-Differenzen-Algorithmus, *Z. angew. Math. Phys.*, **5**, 233–251(1954).
4) H. Rutishauser, Ein infinitesimales Analogon zum Quotienten-Differenzen-Algorithmus, *Arch. Math.*, **5**, 132–137(1954).
5) A. Fukuda, E. Ishiwata, M. Iwasaki, Y. Nakamura, On the qd-type discrete hungry Lotka-Volterra system and its application to the matrix eigenvalue algorithm, *JSIAM Lett.*, **1**, 36–39(2009).

（なかむら・よしまさ，京都大学大学院情報学研究科）

可積分系と渋滞学

西成　活裕

標題にある「渋滞学」というものをご存じない読者も多いと思うので，まず簡単に渋滞学とは何か，という話から始めよう．渋滞といえば，まず思い浮かべるのは，お盆などでの高速道路の大渋滞だろう．50 km にも連なった車のテレビ中継を見ているとうんざりしてくるが，この社会的な無駄を解消する手だてはないものだろうか．もう10年以上も前になるが，私はこの大問題に対して数理科学を使った何か面白い解決方法はないか，といろいろ考え始めた．そうしているうちに渋滞するのは何も車だけではないということに気がついた．まず，駅やイベント会場などでは，人も混雑して動きにくくなる．また，アリの大行列は果たして渋滞しているのだろうか，ということも気になっていた[1]．さらにインターネットをしていても，たまに通信が混雑してホームページの表示が遅いのを感じていたが，これも一種の渋滞現象である．そして我々の体内にも様々な流れがあり，例えば血液や消化物，そして神経系などにおける流れの渋滞こそが病気なのではないだろうか，ということを思いついた[2]．ギリシャの哲学者ヘラクレイトスは「万物は流転する」と言ったが，それならば「万物は渋滞する」と言えるのだ[3]．こうして渋滞研究の面白さにとりつかれてから，ますます広範囲で渋滞研究を加速させ，最近では工場の生産ラインにおける渋滞，つまり在庫をいかに減らすかというテーマに発展したり[4]，土地のバブル崩壊が高速道路で見られる自然渋滞と類似なのではないか，ということまで分かってきた[5]．こうしてあらゆる流れを数理科学で抽象化し，統一的に扱い，その流れが滞る現象として普遍的に渋滞を考察していくのが渋滞学なのだ．

そしてこの研究を遂行していく上で，私にとって中心的な役割を果たしてきたのが可積分系の理論である．私は博士課程時代，可積分系の研究室（東京大学薩摩研究室）にお世話になった．当時，ソリトン理論から生まれた新しい超離散法というものがこの研究室で開発され，大変研究が盛り上がっていた時期だった[6]．周囲は様々な可積分方程式にこの超離散法を適用していたが，私はこの新しい手法を交通流理論に適用してみたのだ．当時，交通流を表すモデルとして，車の流れを連続体のように扱う流体モデル[7]，セルオートマトンを用いた離散モデル[8]，そして各車の動きを微差分方程式で表す追従モデル[9]の3つがよく知られていた．このように様々なモデルが提案されつつある中で，まず私はモデル間の関係に興味を持った．どのモデルも結局対象は同じで，車の動きを表しているのだ．したがって，全く異なるように見えるモデルでも，その間には何か深い関係があるに違いない．しかし流体とセルオートマトンではあまりにも記述方法が違うため，初めは全く手がつけられなかった．流体モデルは，次のバーガース方程式

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} \tag{1}$$

が代表的なモデルである．ここで $u(x,t)$ は時刻 t，位置 x における車の密度を表す．そして，セルオートマトンモデルの代表的なものとして，ルール184モデルが知られていた．これは，1次元に配置した各セルに0または1を書き，1は車がいる状態，0はいない状態を表し，1は右隣りが0のときのみそのセルに動ける，というルールで時間更新していくものだ．そしてこの2つのモデルは，超離散法によってつなげること

ができたのだ．式 (1) を超離散化すると，

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M, U_{j-1}^t, U_j^t - L) - \min(M, U_j^t, U_{j+1}^t - L) \quad (2)$$

という式が得られた[10]．ただし U_j^t は時刻 t，セル j にいる粒子数を表す．これが超離散バーガース方程式だが，ここで $L = M = 1$ と置くと，すべての U_j^t は 0 か 1 の値をとるセルオートマトンになる．しかも 1 の動きを調べてみると，それはまさにルール 184 モデルになっていたのだ．

以上，超離散法によって初めて流体モデルとセルオートマトンモデルとの不思議な接点が明らかになったが，交通流のもう一つのモデルである追従モデルに関しても，可積分系との関わりは深い．まず，初期の追従モデルに関する研究論文を何気なく読んでいたら，戸田格子が出てきたのは驚いてしまった[11]．ちなみに可積分系理論で最も重要な役割を果たしているこの戸田格子が発表された年に私は生まれており，この偶然に私は不思議な運命を感じざるを得ない．そして運転手の反応遅れを持つタイプの追従モデルにおいて，最近ではソリトン方程式の厳密解を求める広田の方法を用いて，渋滞を記述する厳密解が構成された[12]．しかし遅れが入った微分方程式はやはり扱いにくい．そこで遅れのパラメータで展開して 1 次の項まで残すことにより得られるモデルが最適速度モデル[9]である．これは車の一様流解がある条件で線形不安定になることが示され，高速道路で起こる自然渋滞を記述することができるため，実際にも有用なモデルである．この流れが不安定化して非線形飽和する過程を研究するため，最適速度モデルの弱非線形解析が行われた[13]．そこで得られた方程式が変形 KdV 方程式であり，しかもこの楕円関数解が渋滞の性質の理解に重要な役割を果たしたのだ．

このように，渋滞学と可積分系は密接な関係にある．現在，渋滞研究はこれらの数理を基盤にしてかなりの発展をしてきており，また渋滞緩和への社会実験にも応用されている[14]．厳密な可積分数理に基づく解析は信頼性が極めて高く，そのため実測に近い結果を理論モデルから引き出すことができる．そしてこれまでの研究を通じて，数理科学を直接社会へ応用する第一歩ができたと確信している．

参考文献

1) 最近我々は，「アリは渋滞しない」という結果を得た．A. John, A. Schadschneider, D. Chowdhury, K. Nishinari, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) p.108001.
2) K. Nishinari, Y. Okada, A. Schadschneider, D. Chowdhury, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) p.118101.
3) 西成活裕『渋滞学』(新潮選書，2006)．
4) 西成活裕『無駄学』(新潮選書，2008)．
5) K. Nishinari, M. Iwamura, Y. Umeno Saito, T. Watanabe, submitted to *J. Economic Interaction and Coordination*.
6) J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro and M. Torii, *Phys. Lett. A* **225** (1997) p.287.
7) T. Musha and H. Higuchi, *Jpn. J. App. Phys.* **17** (1978) p.811.
8) D. Chowdhury, L. Santen and A. Schadschneider, *Phys. Rep.* **329** (2000) p.199.
9) M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama, *Phys. Rev. E* **51** (1995) p.1035.
10) K. Nishinari and D. Takahashi, *J. Phys. A* **31** (1998) p.5439.
11) G.B. Whitham, *Proc. R. Soc. Lond. A* **428** (1990) p.49.
12) Y. Tutiya and M. Kanai, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2007) p.083002.
13) K. Komatsu and S. Sasa, *Phys. Rev. E* **52** (1995) p.5574.
14) 「渋滞は個人の力で解消できるのか」*JAFMATE* (2009 年 6 月号) p.22.

(にしなり・かつひろ，東京大学先端科学技術研究センター)

可積分系と統計力学



鈴木　淳史

1. はじめに

繰り込み群の創始者たちのエッセー[1,2]を読むとオンサガーによる2次元イジング模型の厳密解[3]が臨界現象の研究に与えたインパクトの大きさが伺い知れる．また頂点模型の厳密解[4]における varying exponent がユニバーサリティの概念に投げかけた影響も大きい．このように可積分な模型が統計力学に果たしてきた役割は非常に大きい．教科書でまずとりあげられる自由電子はもちろん可積分系である．

しかしながら，可積分系は統計力学において「典型的」であり，同時に「非典型的」でもあり，すぐれた試金石でもあり同時にちょっと困った存在でもある．等重率の仮定は平衡系統計力学の基礎である．等エネルギー面または少し幅をもたせた殻の中にある微視的状態はそれも同じ出現確率をもつ．すなわち多くの微視的状態と同一視される巨視的状態の出現確率は高くなる．そこで状態数を数える，ということが重要なプロセスになる．一方，可積分系ではエネルギー以外にも多くの保存量が存在するので，等エネルギー面がそれらの値によってセクター分けされてしまう．すなわち保存量の値を指定した瞬間に多くの微視的状態が全く実現されず，等重率の仮定を破ってしまう．ところが非常に多くの物理系で，ほぼ独立な調和振動子（可積分系！）集団として，平衡系統計力学は問題なく適用されている．

矛盾して見える状況の合理的解釈の一つは文献5) で論じられているように，「観測する量」によっては可積分系でも熱平衡が実現されている (ように振る舞う)，という立場であろう．局所的な少数の点の相関で書けるような量，例えば，磁化，比熱など物理的に興味が持たれる量は可積分系であっても熱平衡に達することがいくつかの例で確かめられている．

以下ではこれを一般に仮定する．その上で，単なるハミルトニアンの対角化を超えて，いかに熱力学的極限において興味ある物理量を可積分系で厳密に評価するか？ という問題を論ずることにする．

本論に入る前に初等的な平衡系統計力学の結果をまとめておく．相互作用もスピンの自由度もないフェルミ粒子の多体系を考える．この場合，一体のエネルギーを $\epsilon_0(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{k}$ を占有する粒子数を $n_{\boldsymbol{k}}$ とすれば系全体のエネルギー E は $E=\sum_{\boldsymbol{k}} n_{\boldsymbol{k}}\epsilon_0(\boldsymbol{k})$ と加算的に表せる．このため (大) 分配関数は，次のように簡単に評価できる．

$$\ln Z = \sum_{\boldsymbol{k}} \ln\Big(1+\mathrm{e}^{-\beta(\epsilon_0(\boldsymbol{k})-\mu)}\Big).$$

次に粒子間に相互作用があるとする．この場合，一体のエネルギーは定義しにくいが全系のエネルギーさえわかれば分配関数は評価できる．そこでまず可積分模型ではどのように全系のエネルギーを評価するのか？ という問題から議論を始めることにする．

2. ベーテ仮説法

以下問題をはっきりさせるためハイゼンベルグ模型に議論を限る．ハミルトニアンは下の通り与えられる．

$$\mathcal{H}_{XXX} = \sum_{i=1}^{L}\left(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + S_i^z S_{i+1}^z + \frac{1}{4}\right).$$

ここで周期境界条件 $S_{i+L}^{\alpha} = S_i^{\alpha}\ (\alpha = x, y, z)$ を仮定する．$2^L \times 2^L$ のハミルトニアン行列をいきなり対角化するのはいかにも不経済である．磁化の値 m によってセクター分けすると ${}_L C_{\frac{L}{2}-m}$ 次元の行列を取り扱うことになる．全運動量等の値を指定すればさらに行列の次元を小さくすることも可能である．しかし系のサイズを大きくしていけば，早晩行き詰まることは明らかであろう．

そこで可積分系で使われる強力な手法が**ベーテ仮説法**であり，固有関数を平面波の重ね合わせの形を仮定して，コンシステントにその係数を決定する[*1][1][6]．すべてのスピンが下向きの状態を真空として，上向きスピンを粒子と見なす（図 1）．いま m 個粒子があるとしよう．これらは波数 $\{k_j\}_{j=1}^{m}$ をもつ．I_j を整数，または半整数とする．相互作用の結果，波数は自由粒子での値 $k_j = \frac{2\pi}{L} I_j$ からずれる．通常は k_j より便利な変数 x_j を用いて，そのずれが書かれる（**ベーテ仮説方程式**）．

$$k_j = \Phi_1(x_j) = 2\pi I_j + \sum_{l=1}^{m} \Phi_2(x_j - x_l). \quad (1)$$

ただし $\Phi_{\alpha}(x) := \frac{1}{i}\ln\left(-\frac{x-i\alpha}{x+i\alpha}\right)$ である．

式 (1) より m 個のベーテ根 $\{x_j\}$ が決まったとする．この 1 セットに対して一つのエネルギー固有値 E が決まる．

基底状態では (1) の根がすべて実軸上に密に分布している．そのため根の分布関数 $\rho(x)$ を導入することによって 1 サイトあたりのエネルギーが表せる．

$$\frac{E}{L} = \frac{1-h}{2} - \int \epsilon_0(x)\rho(x)dx.$$

*1) 近年はこのベーテによる素朴な発想から派生した様々なベーテ仮説法たちが知られている．

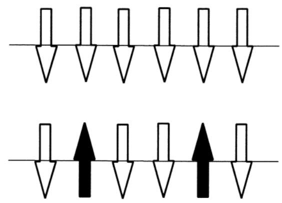


図 1　上：真空，下：$m = 2$．黒矢印が粒子である．

ここで $\rho(x)$ は次の積分方程式を満足する．

$$\rho(x) + K * \rho(x) = p_0(x).$$

ただし $K(x) = \frac{2}{\pi(x^2+2^2)}$ および $p_0(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ である．$*$ は convolution を意味し $A * B(x) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} A(x-y)B(y)dy$ で定義される．ϵ_0 は裸の粒子（孤立した上向きスピン）が持つ裸のエネルギーであり $\epsilon_0(x) := -h + \frac{2}{x^2+1}$ と書ける．ここで h は z 向きの外磁場である．後々の議論では，相互作用まで繰り込んだエネルギー（**dressed energy**）関数 $\epsilon(x)$ を用いるほうが便利である．$\epsilon(x)$ は次の積分方程式を満足する．

$$\epsilon(x) + K * \epsilon(x) = \epsilon_0(x). \quad (2)$$

ここで積分の上下限は $\epsilon(\pm\Lambda) = 0$ を満たす．

$L \to \infty$ で根の「フェルミ海」が安定だと見なせる場合，低い励起の一部は「フェルミ海」にあいた穴（ホール）だと考えてよい．この場合，ホールの分布関数 $\sigma(x)$ も導入して次の積分方程式を考える．

$$\rho(x) + \sigma(x) + K * \rho(x) = p_0(x). \quad (3)$$

3. 有限温度でのアプローチ・ストリング仮説

基底状態またはその近傍では非常に有用なベーテ仮説方程式であるが，高い励起では困難に直面する．表 1 に $L = 8, m = 4$ での高い励起状態の例を 2 つあげておくが，これに収束する初期値を見つけるのはそれほど容易ではない．分配関数を厳密に評価しようとするならばこのような高い励起状態の根も求めて固有値もすべて足し合わせなければならない．しかし式 (1) が複雑すぎて事実

表 1　ベーテ根の例（$L=8,\ m=4$）．

$-0.7040828+1.001116\,i$	$-0.7040828-1.001116\,i$
0.29402522	1.1141404
$-0.4485629+2.004494\,i$	$-0.4485629-2.004494\,i$
-0.4411200	1.3382458

上不可能である．これが，可積分系であっても熱力学を構築するのが困難な理由である．

この状況を打開したのが**ストリング仮説**と呼ばれる取扱いである[7]．熱力学的極限では次のストリング型励起しか存在しないとする．

$$x_{j,\alpha}^{(l)} = x_j^{(l)} - i(l+1-2\alpha), \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, l).$$

ここで l をストリングの「長さ」と言う[*2]．様々な長さのストリングたちに対して分布関数 ρ_l を導入する．さらにホールの分布関数 σ_l も導入すると式 (3) を拡張した次式が成立する．

$$\rho_l(x) + \sigma_l(x) + \sum_k K_k^l * \rho_k(x) = p_l(x).$$

この方程式を制約条件として自由エネルギーを ρ_l に関して変分をとることにより平衡状態を決定することができる．この意味でストリング仮説はミクロカノニカル的なアプローチであると言える．変分条件より $\eta_l := \sigma_l/\rho_l$ は次の結合積分方程式を満足する．

$$\ln \eta_l(x) = -\beta F(x)\delta_{l,1} + \int \frac{dy}{2\pi} F(x-y) \times \ln\bigl(1+\eta_{l+1}(y)\bigr)\bigl(1+\eta_{l-1}(y)\bigr). \tag{4}$$

ただし $F(x) := \frac{\pi}{2\cosh\frac{\pi}{2}x}$ とおいた．この解 η_1 により自由エネルギーは評価できる．

4. 量子転送行列によるアプローチ

一方，カノニカル的な，すなわち分配関数の和を取りきってしまうアプローチが**量子転送行列法**（**QTM**）である[8]．このアプローチは，d 次元の

*2)　表 1 の上は 1− ストリングと 2− ストリングがそれぞれ 2 つずつ，下は 1− ストリングが一つ，3− ストリングが一つの例となっている．

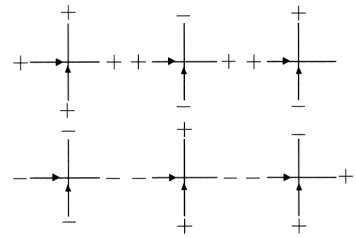


図 2　ice 模型で可能な配置．矢印は「みる方向」を指定している．水平，垂直の矢印が「運動量」v_1, v_2 を運ぶとき上段，下段とも左からボルツマン重率 $1+\frac{u}{2}$，$\frac{u}{2}$，1 が割り当てられる．ただし $u = v_1 - v_2$ である．

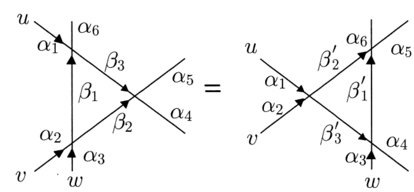


図 3　外線上の α_i を fix して，内線の自由度 β_j, β'_k について和をとると左右が等しくなるのが Yang–Baxter 関係式である．

量子系と $d+1$ 次元の古典系の同等性を利用する．特に可積分系に適用した場合，系の高い対称性により非常に強力な解析的な手段を与える[9~11]．以下はこの場合に限って QTM の説明を行う[*3]．

天下りであるが 2 次元の古典統計力学の模型である ice 模型を考える．正方格子の各辺上に ± をとる物理的変数が存在する．各頂点の周りの配置により **spectral 変数** u でパラメターづけされたボルツマン重率が割り振られている（図 2 参照）．ice 模型の転送行列を $T_L(u)$ で表す．ボルツマン重率よりすぐわかるように $u=0$ のとき T_L は系を「右」に 1 サイト並進させる演算子 R になる．

可積分性のもとである **Yang–Baxter 関係式**は図 3 のように表される．Yang–Baxter 関係式は異なる spectral 変数をもつ転送行列どうしが可換になることを保証する：$[T_L(u), T_L(v)] = 0$．これは $T_L(u)$ が対称性に起因する保存量たちの母関数であることを意味する．良く知られているよう

*3)　可積分系に限れば QTM 以外にも分配関数を厳密に評価する他の手[12]もあるがここでは議論しない．

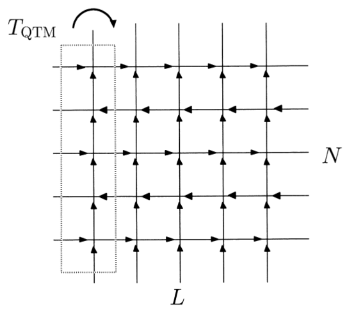


図4 点線でくくった物が $T_{\rm QTM}$ であり左の N サイトの状態を右の N サイトの状態に「転送」する．

に $\mathcal{H}_{XXX}$ はこの保存量に含まれる．

$$T_L(u) \sim R(1+u\mathcal{H}_{XXX})+O(u^2).$$

ここで $u=-\beta/N$ として初等的な等式

$$\lim_{N\to\infty}(1+u\mathcal{H}_{XXX})^N = \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}_{XXX}}$$

を利用しよう，というのがアイデアである．実際にはこれだけでは $(T_L(u)/T_L(0))^N$ の最大固有値の周りのほぼ縮退した多数の固有値を足し上げなければならない困難が残る．QTM ではさらに次のようなトリックを用いる[8)]．

上の公式の N を整数とし問題を縦が N サイト，横が L サイトからなる古典2次元系の分配関数の評価に焼き直す．さらにこの仮想的な次元に作用する新しい（量子）転送行列 $T_{\rm QTM}$ を考える．$T_L(u)R^{-1}$ とは異なり QTM のスペクトルは $N\to\infty$ でも有限のギャップをもつ（！）[*4)]．そのため様々な状態を足し上げずとも，1サイトあたりの自由エネルギー f は $T_{\rm QTM}$ の最大固有値 τ のみによって $f=-1/\beta\log\tau$ で評価できる．これは大変な利点である．さらに「向きが互い違いの」転送行列を重ね合わせることにより R という余計な作用素をキャンセルすることもできる[11)]．

可積分系ではさらに大きな利点がある．QTM には，新たに変数 x が導入でき，異なる x をもつ $T_{\rm QTM}$ どうしは可換であり本来の1サイトあたりの分配関数 κ は量子転送行列を用いて次のように表せる[11)]．

$$\kappa^L_{\rm 1D}(\beta) = \lim_{N\to\infty}{\rm tr}T^L_{\rm QTM}\quad\left(u=-\frac{\beta}{N}, x=0\right).$$

うまく問題を回避したように見えるが，もちろん代価を払わねばならない．「結合定数」u がシステムサイズに依存しているため本質的に「**有限サイズ**」の問題を取り扱わねばならない．

新しい変数 x は一見無意味に見えるが，有限の N に対して $T_{\rm QTM}(x)$（u 依存性は以下省略）は x に関して解析的であり，これにより以下見るよう有限サイズの問題をうまく処理することができる．

手始めにストリング仮説での結果を再導出してみよう[13)]．このため $T_1(x):=T_{\rm QTM}(x)$ を含む転送行列の族 $T_m(x)$ $(m=0,1,2,\cdots)$ を**フュージョン**と言われる代数的構成によって導入する．フュージョンは角運動量の合成の類似物であり，そこでのテンソル積分解に対応して $T_m(x)$ の間には次の関数等式が成立する[*5)]．

$$T_m(x+i)T_m(x-i) = 1+T_{m+1}(x)T_{m-1}(x).$$

ただし模型の詳細に依存する既知の関数は省略してある．従属変数変換 $y_m(x)=T_{m+1}(x)T_{m-1}(x)$ により上の式は次のように書き直せる[*5)]．

$$y_m(x-i)y_m(x+i) = Y_{m+1}(x)Y_{m-1}(x). \quad (5)$$

ここで $Y_m(x):=1+y_m(x)$ である．$y_m(x), Y_m(x)$ の固有値たちは（規格化に由来する自明な極を除いて）それぞれ $\Im{\rm m}\in[-1,1]$, $\Im{\rm m}\in[-\epsilon,\epsilon]$ の領域で解析的であることがわかる．これにより代数式である (5) をフーリエ変換により積分方程式に変換することができる．変換後の式では $N\to\infty$ の極限を解析的に採ることができる．その結果は $\ln y_j(x)=\beta\eta_j(x)$ と同一視することにより式 (4) に一致する．すなわち解の形に仮定をおくことなしに，ストリング仮説の式を解析性に関する議論より導き出すことができたわけである．

式 (4) を解くためには多くの $\eta_j(x)$ たちを取り

---

*4) 場の理論などではここと同様なトリックを「等方性より」用いている．ここではむしろ「非常に異方的」であることが本質である．

*5) それぞれ T-system, Y-system と呼ばれる関数等式の最も簡単な例となっている．

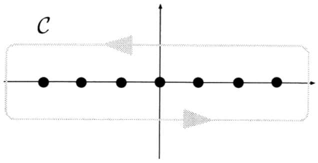


図 5　積分経路 $\mathcal{C}$ はベーテ根（黒丸）をすべて取り囲む．

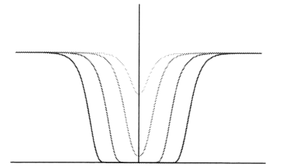


図 6　$|\ln(1+a^{\pm})|$ の概略図，線が濃い物ほど温度が低い．

扱う必要がある．そこでもう少し「エコ」なアプローチを考えたい*6)．詳細は省略するが QTM を上のように無限の列 $\{T_m\}$ に埋め込むのでなく $T_{\rm QTM}$ だけからうまい補助関数 $\mathfrak{a}$ を定義することができる．このとき実軸近傍での $1+\mathfrak{a}(x)$ のゼロはベーテ根と一致する．これにより $\mathfrak{a}(x)$ それだけで閉じる積分方程式を導くことができ，$N\to\infty$ 極限も直接取ることができる．

$$\ln\mathfrak{a}(x)=\beta\epsilon_0(x+i)-\int_{\mathcal{C}}K(x-y)\ln A(y)dy.$$

ただし $A=1+\mathfrak{a}$ と略記した．積分経路 $\mathcal{C}$ は $\Im{\rm m}x\in(-1,1)$ なるストリップでベーテ根をすべて取り囲むように取る（図 5）．$\mathfrak{a}(x)$ により自由エネルギーが次のように表される．

$$-\beta f=\frac{\beta h}{2}+\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{x(x+2i)}\ln A(x)\frac{dx}{\pi}. \quad (6)$$

以下にみるようにこのアプローチは「エコ」であるだけでなく，より物理的な理解を与えてくれる．

5. 補助関数の物理的意味

補助関数の意味を考えるために磁場を有限に保って低温の極限をとってみよう．この場合経路の上の部分で $|\mathfrak{a}|$ は非常に小さく，下の部分では非常に大きいことが数値的に確かめられる．そこで $a(x):=\mathfrak{a}(x-i)$ とおくと $|\Im{\rm m}x|\ll 1$ なる x に対して $\mathfrak{a}$ の式は次のように近似できる．

$$\ln a(x)+K*\ln a(x)=\beta\epsilon_0(x).$$

ただし積分の上下限は $\ln a(\pm\Lambda)=0$ で決まる．式 (2) と比較することにより $\epsilon(x)$ と $a(x)$ は低温の極限で次のように結びついていることがわかる．

$$\ln a(x)\sim\beta\epsilon(x). \quad (7)$$

同様に自由エネルギーの式も簡単になる．

$$\beta(f-f_0)\sim-\int\ln(1+{\rm e}^{-\beta\epsilon(x_k)})\frac{dk}{2\pi}.$$

ここで f_0 は基底状態のエネルギーであり $h=0$ ならば $-2\ln 2$ である．すなわち，自由粒子に対する表式において**フェルミ分布**での一粒子エネルギーを dressed energy に置き換えることにより，低温の極限での正しい表式が導くことができる！

磁場も温度も小さい極限で，上の議論で無視してしまった項を取り入れて考えることもできる．そのためには，$a^{\pm}(x)=\mathfrak{a}(x\pm i)$ として $a^{-}(x)(a^{+}(x))$ を x 実軸付近の上半面（下半面）で用いると良い．$|\ln(1+a^{\pm})|$ は図 6 のようにフェルミ分布関数をひっくり返したような形をしている．このことを用いて $a^{\pm}$ に対する積分方程式を近似し，元の変数 k に戻しさらに $w_{\pm}(k)=1/a^{\pm}$ と書くとそれらは次を満足する[15]．

$$\exp(\beta\epsilon_a^0(k))=(1+w_a)\prod_{b=\pm}\left(\frac{w_b}{1+w_b}\right)^{\mathfrak{g}_{b,a}}.$$

ただし $\epsilon_{\pm}^0=\cos k\mp h$ であり $\mathfrak{g}$ はすべての成分が $\frac{1}{2}$ である 2×2 行列である．これはまさにスピノンが満たすべき**分数排他統計**[16]である．すなわちここで導入された補助関数はスピノンを近似なしに記述しているのである．

6. 相関関数

相関関数を求めることは大変困難な作業であ

*6)　ここで論じるのとはまた別の意味で「エコ」な定式化もある[14]．

る[*7)]．しかしながら，近年，代数的構造の理解が進み基底状態での近接相関関数に対して様々な結果が得られるようになってきた[18~21)]．

有限温度での相関関数はこれよりはるかに難しい問題のように思える．ところがQTMを用いるとほとんどゼロ温度の議論とパラレルに，というよりむしろもっと簡単に形式的な表式なら導けることがわかってきた[22,23)]．隣接する n 個のサイトの行列要素 E^{α}_{β} の積を考える．各サイトにパラメーター $\xi_i (i=1,2,\cdots)$ が振り分けられているときに，その期待値は次の形に表せる．

$$\langle E^{\alpha_1}_{\beta_1}(\xi_1)\cdots E^{\alpha_n}_{\beta_n}(\xi_n)\rangle = \prod_{j=1}^{m}\int_C \frac{d\lambda_j}{1+\mathfrak{a}(\lambda_j)} \times \prod_{j=1}^{n-m}\int_C \frac{d\lambda_{m+j}}{1+\mathfrak{a}^{-1}(\lambda_{m+j})} \times \mathcal{F}^{\{\lambda_j\}}_{\{\xi_j\}}. \quad (8)$$

ただし，いま n 個の添字のうち m 個が上向きをとっているとする．$\mathcal{F}^{\{\lambda_j\}}_{\{\xi_j\}}$ は行列要素に依存した関数で $n!$ 項の和で書けるが具体形は略す．

量子統計における様々な相関関数はWickの定理によりフェルミ分布関数の積と既知の関数の組合せで与えられる．ただし一般には摂動展開により，このような項を無限に足し合わせねばならない．一方，(7)を思い出せば，(8)はまさにその形で表されることがわかる．ただし通常とは異なりフェルミ分布関数は裸のエネルギーでなく，dressed energy（の一般化）によって表されておりこれにより結果が有限項の和に収まる．

7. 終わりにあたって

この小論では，可積分系とはいえ基底状態エネルギーを超えた量を近似なしに求めるのは困難であり，いくつものnontrivialなアイデアが必要であることを見てきた．その結果得られた表式(6)や(8)にdressed energyを用いたフェルミ分布が現れるのは，実に示唆的である．一般にこのような置き換えが有効であるかどうか調べてみることは重要であろう．その意味で境界付きの共形場理論における g 関数の解析は大変興味深い．g 関数に対して第一原理的扱いはクラスター展開しか存在しない．そこで通常は一粒子ボルツマン因子 $\mathrm{e}^{-m\beta\cosh\theta}$ の展開で多体の相関を入れていく．これをdressed energyによって記述される適宜適当な因子，例えば $\ln(1+\mathrm{e}^{-\beta\epsilon(\theta)})$ 等におきかえることにより，他の数値的結果と定量的な一致が得られることが文献24)で示されている．

*7) 基底状態における最近接スピン相関関数はエネルギー表式より比較的容易に求めることができる．しかしながら次最近接スピン相関関数が評価できたのはベーテの論文からなんと40年経った後のことである[17)]．

参考文献

1) L. Kadanoff *et al*, *Rev. Mod. Phys.* **39** (1966) 395.
2) M.E. Fisher, *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 653.
3) L. Onsager, *Phys. Rev.* **65** (1944) 117.
4) R.J. Baxter, "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics" (Dover, 2008).
5) A. Sugiyama, 数理解析研講究録 **1507** (2006) 147; R.V. Jensen and R. Shankar, *Phys. Rev. Lett* **54** (1985) 1879.
6) H. Bethe, *Z. Phys.* **71** (1931) 205.
7) M. Takahashi, "Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models" (Cambridge 1999).
8) M. Suzuki, *Phys. Rev.* **B 31** (1985) 2957.
9) M. Suzuki and M. Inoue, *Prog. Theor. Phys.* **78** (1987) 787.
10) J. Suzuki, Y. Akutsu and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan* **59** (1990) 2667.
11) A. Klümper, *Ann. Physik* **1** (1992) 540.
12) G. Kato and M. Wadati, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 5060.
13) A. Kuniba, K. Sakai and J. Suzuki, *Nucl Phys* **B525** [FS] 597.
14) M. Shiroishi and M. Takahashi, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 117201; Z. Tsuboi, *J. Phys.* **A37** (2004) 1747.
15) J. Suzuki, *J Phys* **A31** (1998) 6887.
16) F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett* **67** (1991) 937.
17) M. Takahashi, *J. Phys. C* **10** (1977) 1289.
18) M. Jimbo and T. Miwa, *J. Phys. A* **29** (1996), 2923.
19) N. Kitanine *et al*, arXiv:hep-th/0505006.
20) H. Boos *et al*, *Comm. Math. Phys.* **272** (2007), 263.
21) J. Sato, M. Shiroishi, and M. Takahashi, *Nucl. Phys. B* **729** (2005), 441.
22) F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel, *J. Phys. A* **38** (2005), 1833.
23) H. Boos *et al*, *JSTAT* (2008) P08010.
24) P. Dorey *et al*, *Nucl. Phys. B* **696** (2004) 445.

（すずき・じゅんじ，静岡大学理学部）

時弘　哲治

可積分系への入門書たち

運動方程式の近代的な解析理論である解析力学は，18 世紀から 19 世紀にかけて Lagrange, Poisson, Hamilton, Liouville らによって始められ，そこで「可積分性」の概念が導入されている．彼らは，ある運動方程式が可積分であるとは，その方程式の解を具体的に求めることができる，もしくは運動の保存量を求めることによって間接的に（陰函数の形で）定めることができ，系のすべての局所的ならびに大域的な情報が得られることとした．こうした古典力学における可積分性とその数学的な背景を学ぶときの良い入門書は，V.I. Arnold の『古典力学の数学的方法』（安藤・蟹江・丹羽訳，岩波書店）であろう．

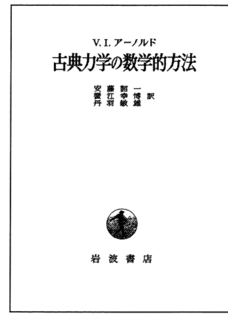
有限次元の力学系の可積分性の概念を無限次元に拡げたのはソリトンの発見であった．ソリトンを記述する KdV 方程式の特徴的な性質の中に，(1) 無限個の独立な保存量が存在する，(2) 無限次元のハミルトン系として記述できる，ことがあり，有限次元可積分系に対して無限次元可積分系と呼ばれている．無限次元可積分系の発展には，戸田盛和，広田良吾，佐藤幹夫といった日本人が大きな貢献をしている．戸田は，物理学的な観点から可積分な非線形格子（戸田格子）を発見した．格子点の数が有限な場合には，解析力学的な意味で可積分系であるが，戸田格子の興味深い点は，連続極限で KdV 方程式に帰着すること，（KdV 方程式のように）線形方程式の両立条件として表現できること，周期系の解は超楕円曲線に付随するヤコビ多様体上の線形運動として表現されることなどがあげられる．この戸田格子と非線形波動との関係を物理的な視点も交えて丁寧に解説したのが，『非線形波動とソリトン』（戸田盛和著，日本評論社）である．広田良吾は広田微分による広田の双線形形式の手法を発見し，ソリトン解の系統的な構成法を与えた．これは，広田良吾著『直接法によるソリトンの数理』（岩波書店）に詳しい．また，佐藤幹夫はソリトンの統一理論である KP 階層の理論を構築し，ある意味でソリトン理論を完成させたと言える．例えば，三輪，神保，伊達著『ソリトンの数理』（岩波書店）にわかりやすい解説がある．

古典可積分系に対して，量子可積分系は，当然，20 世紀初頭の量子力学の発見以降に発見された．ここで，量子可積分性とは，おおざっぱには，（多体の）ハミルトニアンが対角化できることであり，可解格子模型の自由エネルギーを解析的に計算できることである．古くは 1931 年に解かれたハイゼンベルグスピン模型（XXX モデル）などがあるが，量子可積分系が注目を集めたのは，1960 年代になって C.N. Yang と R.J. Baxter が量子模型あるいは格子模型の可積分性を Yang–Baxter 関係式として独立に定式化してからである．特に可解格子模型に関しての古典的な名著は Baxter による『Exactly Solved Models in Statistical Mechanics』（R.J. Baxter 著，Academic Press）である．その後，代数的ベーテ仮設法や量子逆散乱法などの手法の発達の後，量子可積分系の背後にある数理構造は Drinfeld と神保道夫によって独立に解明された．すなわち Yang–Baxter 関係式を満たす R 行列とは，適当な量子代数のテンソル積表現間の intertwiner であるというものである．この点に関しては『量子群とヤン・バクスター方程式』（神保道夫著，シュプリンガー・ジャパン）が基本的な入門書である．

最後に，ソリトン方程式の相似変形やイジング模型の相関関数に現れるパンルヴェ方程式についての入門書をあげたい．パンルヴェ方程式は，19 世紀の解析学の中で，非線形常微分方程式によって良い超越函数を定義する目標で最終的に得られた方程式系である．現在では，離散パンルヴェ方程式に発展し，坂井による初期値空間の分類理論や野海–山田によるワイル群の表現を用いた対称形式の理論など非常に美しい理論に発展している．これらの理論のもとになったのは岡本和夫によるパンルヴェ方程式のハミルトン形式の理論，初期値空間の理論である．そのほぼ唯一の入門書は，『パンルヴェ方程式序説』（岡本和夫著，上智大学講究録）であったが，最近，同氏による『パンルヴェ方程式』（岩波書店）が出版された．序説が出版されて 20 年の歳月を経て出版された完全版であり，内容も一段と深くなっている．

（ときひろ・てつじ，東京大学大学院数理科学研究科）

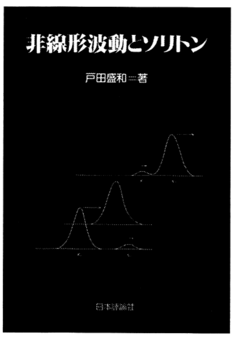
古典力学の数学的方法



V.I. アーノルド著，安藤・蟹江・丹羽訳，A5 判，502 頁，岩波書店

Lie 群や Lie 環，シンプレクティック幾何学の理論を用いて古典力学を近代的に紹介・解説した本である．ハミルトン系が可積分であるとは，位相空間の次元数のちょうど半数個の互いに対合的な独立な保存量を持つことであり，このとき解は求積法によって求められることなどが論じられている．かなりのページ数があり，決して読み通すのは楽ではないが，旧ソビエト連邦時代の著書にしては図も多く丁寧に解説してあり一読に値すると思う．

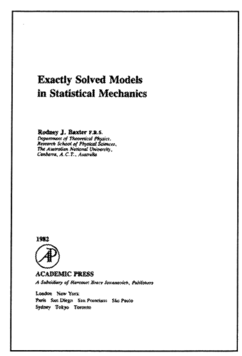
非線形波動とソリトン



戸田盛和著，日本評論社（新版：A5 判，336 頁）

この本では浅い水面の波を記述する KdV 方程式の導出から始まり，ソリトン解，逆散乱法，非線形格子（戸田格子），周期解，カオスとの関係などが詳しく記述されている．随所に歴史的な背景や著者の個人的な体験，物理的な考察が与えられていて読み物としてもなかなか面白い．個々の計算過程も実に丁寧に示されており，大変読み易い良書である．

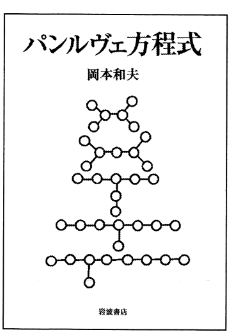
Exactly Solved Models in Statistical Mechanics



R.J. Baxter 著，494 頁，Academic Press

最も単純な 1 次元イジング模型から始まり，楕円函数によってパラメータ付けられる 8 頂点模型や相関関数決定のための角転送行列の方法まで詳しく説明されている．序文に，モデルが数学的に過ぎるという意見もあると断った上で，「これらの格子モデル研究の正当化は至極単純である：それらは（統計力学に）関係があり解くことができる，ならば何故解いて結果を見ようとしないのか？」とあるのが印象的だった．

パンルヴェ方程式



岡本和夫著，A5 判，302 頁，岩波書店

フックス型の微分方程式の一般論から始まり，パンルヴェ方程式の発見と 1970 年代における著者の先駆的研究，さらにここ 20 年の理論発展にまで言及したパンルヴェ方程式の入門書．上智大学の講究録『パンルヴェ方程式序説』に加筆・完成させたものと思うが，講究録の各章の序文にある薀蓄と著者の独特の字体が見られないのはやや寂しい．講究録もあわせてご覧になると面白いかもしれない．

量子群と可積分系



尾角　正人

1. はじめに

数学の歴史を振り返ってみても，数理物理学における具体的な問題から新しい概念が生まれることがある．例えば，理工系の大学 2，3 年生なら「フーリエ解析」を勉強するが，これはもともとフランスの数学者フーリエが19 世紀の初めに 1 次元熱伝導方程式の初期値問題という非常に具体的な問題を解くために考案したフーリエ級数・変換がことの始まりである．世に出た当初は，任意の関数が三角関数の級数で表されるのか，という大問題があり，すんなり数学界に受け入れられなかったのであるが，今では応用解析においてなくてはならないものになっている．

量子群も可積分系，もっと限定して**可解格子模型**において，**ヤン・バクスター方程式**の解を構成するという具体的な問題から生まれた概念であり，今では可積分系や，さらには数学の表現論と呼ばれる分野にもなくてはならないものとなっている．本稿では，まず量子群がどのようなものかを見て，次にどのようにして可解格子模型から生まれてきたのかを見ることにする．そして最後に，量子群についての研究成果がどのように可積分系にフィードバックされたのかを見てみることにしよう．

2. 量子群とは

「群」という数学の概念は広辞苑にも載っているように 4 つの公理から定義される代数系であるが，紛らわしいことに量子群は群ではない．量子群は非可換かつ非余可換なホップ代数というのが正しい．しかし，ホップ代数の定義から入る余裕はとてもないので，$U_q(sl_2)$ と書かれる最も基本的な量子群を取り上げてその基本的な性質を調べてみよう．$U_q(sl_2)$ は q というパラメータをもち，生成元 e, f, t（t は可逆）とそれらの間の関係式

$$\begin{aligned} tet^{-1} &= q^2 e, \quad tft^{-1} = q^{-2} f, \\ ef - fe &= \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}} \end{aligned} \tag{1}$$

で定義される代数[*1)]のことである．この関係式を見て目ざとい人は，トレースが 0 の 2×2 行列全体がなすリー環 sl_2 のシュヴァレー生成元の間の関係式に似ていると気づいたかもしれない．確かに

$$e = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

と sl_2 の基底をとると[*2)]

$$\begin{aligned} he - eh &= 2e, \quad hf - fh = -2f, \\ ef - fe &= h \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立ち (1) と似ている．$U_q(sl_2)$ の q や t を

*1)　1 をもつ可換環 K の作用がある多元環のこと．ここでは $K = \mathbb{Q}(q)$ と考えておけばよい．

*2)　書き入れてない成分は 0．

$q = e^{\varepsilon}, t = e^{\varepsilon h}$ とおき，ε は微小量だと仮定して，$q = 1 + \varepsilon + o(\varepsilon), t = 1 + \varepsilon h + o(\varepsilon)$ と展開しよう．それを (1) の各式に代入して，第 1，2 式では ε の 1 次の項，第 3 式では 0 次の項を見てみよう．(2) の各式が得られるではないか．リー環 sl_2 を，e, f, h で生成され，関係式 (2) で定義される代数と見るときは sl_2 の普遍包絡環と呼ばれ，$U(sl_2)$ と書かれる．上の計算でおわかりのように，量子群 $U_q(sl_2)$ は $U(sl_2)$ をパラメータ q を用いて“変形”したものなのである．

この節の最初で，量子群は非可換かつ非余可換なホップ代数であると述べた．非可換というのは，ご存知のように 2 元の積とその順序を入れかえたものが一般に異なることを言う．非余可換のほうを説明しよう．以下ではテンソル積 $\otimes$ が頻出するが，必要ならば適当な本[1)]で補っていただきたい．一般に代数 A において，準同型 $\Delta : A \to A \otimes A$ が存在し，$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ が成立するとき，この Δ を余積と言う．普遍包絡環 $U(sl_2)$ では $x = e, f, h$ のときに $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ と定義し，一般の元に対しては Δ が準同型であるという要請により $\Delta(x)$ を定めると，この Δ が余積を与える．表示から直ちにわかるように，σ をテンソル積の第 1 成分と第 2 成分の入れかえとすると $\sigma \circ \Delta = \Delta$ が成立する．この性質を，A は**余可換**であると言う．$U_q(sl_2)$ の場合はどうであろうか．$U_q(sl_2)$ では，

$$\begin{aligned}
\Delta(e) &= e \otimes 1 + t \otimes e, \\
\Delta(f) &= f \otimes t^{-1} + 1 \otimes f, \\
\Delta(t) &= t \otimes t
\end{aligned}$$

と定め，一般の元に対しては $U(sl_2)$ のときと同様 Δ が準同型であるという要請により定める．ここで問題となるのは，Δ が well-defined であるか，つまり，$\Delta(tet^{-1} - q^2 e)$ などが 0 になるかだが，これはちょうどよい計算問題なので皆さんに任せることにしよう．$U_q(sl_2)$ では $\sigma \circ \Delta \neq \Delta$ であることに注意しよう．これが $U_q(sl_2)$ の非余可換性である．

ここで，**表現**について復習する．代数 A に対し，ベクトル空間 V と準同型写像 $\pi : A \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ の組 (π, V) を A の表現と言う．A に余積 Δ があれば 2 つの表現 (π_i, V_i) $(i = 1, 2)$ に対し，

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{\pi_1 \otimes \pi_2} \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$$

と合成することによってテンソル積表現 $((\pi_1 \otimes \pi_2) \circ \Delta, V_1 \otimes V_2)$ を考えることができる．A が余可換ならば，$V_1 \otimes V_2$ とそのテンソル積の順序を入れかえた $V_2 \otimes V_1$ に自然な同型が存在するが，非余可換のときはそれは保証されない．しかし，量子群 $U_q(sl_2)$ の場合には非自明な同型写像 $R : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ が存在する．そして，後で見るように，この R（**量子 $\boldsymbol{R}$ 行列**と言う）がヤン・バクスター方程式の解になるのである．

3. 可解格子模型とヤン・バクスター方程式

2 節で見たような量子群は 1985 年に神保とドリンフェルトが独立に発見したものだが，その目的はヤン・バクスター方程式の解をシステマティックに構成することにあった．ヤン・バクスター方程式の解とは何か，それがなぜ格子模型を解析する上で重要なのかを基本的な例で見てみよう．2 次元格子模型の中に**6 頂点模型**と呼ばれるものがある．これは 2 次元正方格子上の各辺の上に $+$ または $-$ の 2 つの状態をとる変数（スピン変数）があり，各格子点の周りの 4 つの辺のスピン変数の値が定まるとそこに相互作用エネルギーが生じるという統計力学模型である．統計力学では，エネルギーと温度に対応してその状態の**ボルツマン重率**が定まる．図 1 の 6 つの状態（複合同順）の局所的なボルツマン重率がそれぞれ a, b, c であり，その他が

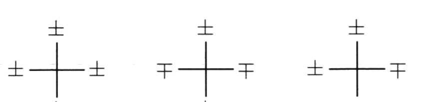


図 1　6 頂点模型.

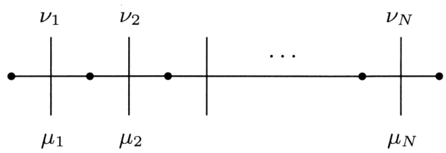


図 2　転送行列.

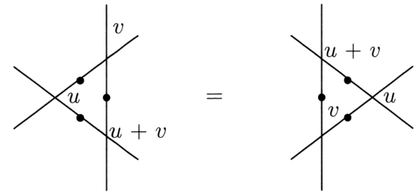


図 3　ヤン・バクスター方程式.

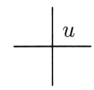


図 4　ボルツマン重率.

0[*3] となるように定義された格子模型を 6 頂点模型という．“頂点” とはバーテックス（vertex）の訳で図 1 のような十字形（の中央の点）を指す．6 頂点模型は自由エネルギーという統計力学において重要な量を（近似的にではなく）厳密に計算できるという意味で “可解” である．自由エネルギーの計算に必要なものは**転送行列**の最大固有値である．転送行列とは図 2 のように上と下の列のスピン変数の値 $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N)$ と $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_N)$ を固定し，$\bullet$ のところはひとまず任意に値を指定する．ただし，両端の $\bullet$ では同じ値をとるという制約をおく（周期的境界条件）．そして，すべてのバーテックスに対応するボルツマン重率の積をとり，すべての $\bullet$ の値について和をとったものを，行のインデックス $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)$，列のインデックス $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N)$ に対する成分とする $2^N \times 2^N$ の行列のことである．

過去の研究において明らかになったのは，ボルツマン重率を

$$a = \sin(\lambda + u), \quad b = \sin u, \quad c = \sin\lambda \quad (3)$$

とパラメトライズし，転送行列 T を u の関数と見なすと，

$$T(u)T(v) = T(v)T(u) \qquad (4)$$

が成立するという事実である．一般に，対角化可能な互いに可換な行列は同時対角化できるので，(4) は転送行列 $T(u)$ の固有値，固有ベクトルに対して多くの情報を与える．これが 6 頂点模型を解く “鍵” の役割を果たしていたのである．実は，この転送行列の可換性はもっと局所的な条件から導くことができる．図 3 を見てみよう．両辺の 3 つの線分の両端にはスピン変数の値があり，$\bullet$ 上にもあって，$\bullet$ については和がとられている．図 4 で周りの 4 つのスピン変数の値が定まったときのスペクトル変数 u でのボルツマン重率を表すことにすると，図 3 はスペクトル変数が $u, v, u+v$ のときの 3 つのボルツマン重率の積をとり，$\bullet$ の可能性で和をとったものが，左右で等しいことを表す．これがヤン・バクスター方程式であり，この方程式から転送行列の可換性 (4) を導くことができるのである．

ヤン・バクスター方程式は線形写像間の関係式として書くこともできる．2 次元ベクトル空間 $V = \mathbb{C}u_+ \oplus \mathbb{C}u_-$ のテンソル積 $V^{\otimes 2} = V \otimes V$ にはたらく線形写像 $R(u)$ を，基底 $u_+ \otimes u_+, u_+ \otimes u_-, u_- \otimes u_+, u_- \otimes u_-$ に関して

$$R(u) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & c & b & \\ & b & c & \\ & & & a \end{pmatrix} \qquad (5)$$

と行列表示されているものとして定義する．ここで a, b, c は (3) で与えられているものである．このとき，ヤン・バクスター方程式（図 3）は $V^{\otimes 3}$ 上の線形写像の恒等式

$$\begin{aligned}&(R(v) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(u) \otimes 1) \\ &= (1 \otimes R(u))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(v)) \quad (6)\end{aligned}$$

と同値になる．

6 頂点模型が可解である理由として，転送行列

*3)　ボルツマン重率が 0 というのは，その状態が起き得ないことを意味する．

の可換性，さらにそのための局所的な条件として，ヤン・バクスター方程式というものがあるということを見てきた．量子群は，このヤン・バクスター方程式に内在する代数的な構造を抽出することによって生まれた概念なのである．

4. ヤン・バクスター方程式と量子群

ヤン・バクスター方程式が成立するカラクリを量子群の表現論を使って説明しよう．そのためには 2 節で説明した量子群 $U_q(sl_2)$ のアフィン版 $U_q(\widehat{sl}_2)$ を用意する必要がある．$U_q(\widehat{sl}_2)$ は生成元 $e_i, f_i, t_i\ (i=0,1)$ とそれらの間の関係式

$$t_i e_j t_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_j, \quad t_i f_j t_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_j,$$
$$e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q - q^{-1}}$$

で定義される代数である[*4)]．ここで (a_{ij}) は $\widehat{sl}_2$ という最も簡単なアフィンリー環のカルタン行列

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

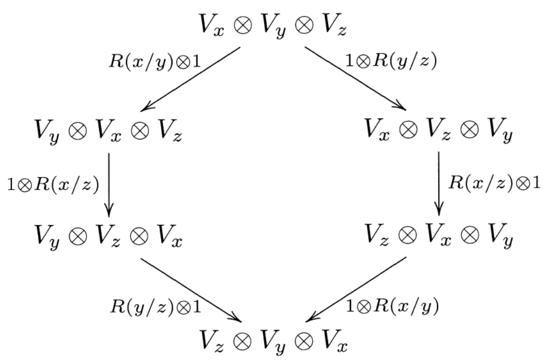
である．アフィン量子群 $U_q(\widehat{sl}_2)$ でも $U_q(sl_2)$ と全く同様に余積 Δ が定義される．さて，この $U_q(\widehat{sl}_2)$ のパラメータ x 付きの 2 次元表現 (π_x, V) を考える．

$$\pi_x(e_0) = \begin{pmatrix} & \\ x & \end{pmatrix}, \quad \pi_x(e_1) = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix},$$
$$\pi_x(f_0) = \begin{pmatrix} & x^{-1} \\ & \end{pmatrix}, \quad \pi_x(f_1) = \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix},$$
$$\pi_x(t_0) = \pi_x(t_1)^{-1} = \begin{pmatrix} q^{-1} & \\ & q \end{pmatrix}.$$

以下では，表現空間 V に添え字 x をつけて V_x とも表すことにする．我々には余積があるのでテンソル積表現 $V_x \otimes V_y$ や $V_y \otimes V_x$ を考えることができる．そうすると $U_q(\widehat{sl}_2)$ のすべての元 X に対して

$$R(x,y)((\pi_x \otimes \pi_y) \circ \Delta)(X)$$
$$= ((\pi_y \otimes \pi_x) \circ \Delta)(X) R(x,y)$$

を満たす 0 でない $\mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ の元 $R(x,y)$ がスカラー倍を除きただ一つ定まるのである．さらに，x, y の依存性は本質的に x/y の商だけであり，$q = e^{i\lambda}, x/y = e^{2iu}$ の対応の下で $R(x,y)$ は (5) に一致する[*5)]．R たちを合成して $V_x \otimes V_y \otimes V_z$ から $V_z \otimes V_y \otimes V_x$ への $U_q(\widehat{sl}_2)$ の作用と交換する線形写像を考えてみよう．



すると，$R_1 = (R(y/z)\otimes 1)(1 \otimes R(x/z))(R(x/y) \otimes 1)$（左ルート）と $R_2 = (1 \otimes R(x/y))(R(x/z) \otimes 1)(1 \otimes R(y/z))$（右ルート）の 2 つが考えられる．$R_2^{-1} R_1$ は $V_x \otimes V_y \otimes V_z$ からそれ自身への写像となり，$U_q(\widehat{sl}_2)$ の作用と可換である．表現 $V_x \otimes V_y \otimes V_z$ は既約[*6)]であるため，シューアの補題という表現論で基本的な命題により，$R_2^{-1} R_1$ は恒等写像のスカラー倍であることが結論される．あとは適当な成分を比較して，スカラーが 1 であることを確認することにより $R_1 = R_2$ が証明される．これがヤン・バクスター方程式 (6) だったわけである．かくして，ヤン・バクスター方程式の解の構成は，$U_q(\widehat{sl}_2)$ のようなアフィン量子群の有限次元表現論に発展的に昇華されたのである[*7)]．

*4) 本当は他にもセール関係式というのがある．

*5) 正確には (2,2), (3,3) 成分にズレが生じるが，ヤン・バクスター方程式を保存する簡単な変換で結ばれている．

*6) 自明なもの（0 およびそれ自身）以外にその代数の作用で閉じた部分空間が存在しないこと．

*7) 実は，このような定式化で求められるヤン・バクスター方程式の解は**三角関数型**と呼ばれ，さらに上の階層のものとして**楕円関数型**もある．その代数的枠組みとして**楕円量子群**が研究されている．しかし，この代数はホップ代数からは少しずれた準ホップ代数と言われるものになる．

5. 可解格子模型への恩返し

これまでは，量子群が可積分系の一つである可解格子模型から必要とされて生まれてきた概念であることを説明してきたが，今度は量子群がいわばその母親に恩返しをする例を見てみることにする．6 頂点模型は 2 次元の古典統計力学系であるが，この節では代表的な 1 次元の量子系である **XXZ 模型**を見てみよう．これは，テンソル積空間 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ にはたらくハミルトニアン

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \Delta\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z)$$

で定義される量子模型である．ただし，$\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ はパウリ行列

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix},$$
$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

で，σ_i^ξ の i は $\mathbb{C}^2$ の N 重テンソル積の第 i 番目の $\mathbb{C}^2$ にのみはたらく（他の成分上は 1）ことを意味する．また，Δ はパラメータである．実は，この $\mathcal{H}$ を対角化する問題は，6 頂点模型の転送行列を対角化する問題と同等であることがわかっている．さて，XXZ 模型で特に計算したいのは，$N \to \infty$ の極限（熱力学極限）で基底状態（$\mathcal{H}$ の最低固有値を与える固有状態）での**相関関数**である．例えば 2 点相関関数だと $\langle \mathrm{vac}|\sigma_i^z\sigma_j^z|\mathrm{vac}\rangle$ などと表されるもので，局所作用素 $\sigma_i^z\sigma_j^z$ の基底状態での期待値である．このような 1 次元量子スピン模型の相関関数の計算は大変難しく，1960 年代に XX 模型（$\Delta = 0$ のとき），1970 年代に XXX 模型（$\Delta = 1$ のとき）についていくつかの結果があるのみで，Δ 一般の XXZ 模型については $\langle \mathrm{vac}|\sigma_i^z|\mathrm{vac}\rangle$ のような場合を除き 1990 年頃までほとんど結果らしい結果はなかったと言える．しかしながら，量子群の発見後，急速にアフィン量子群の表現論およびそれを用いた可解格子模型の研究が進んだ結果，$U_q(\widehat{sl}_2)$ の表現論により XXZ を解析する枠組みが確立され，1992 年ついに神保・三木・三輪・中屋敷が $\Delta < -1$ の領域における任意の相関関数を多重積分で表示することに成功したのである．これは可解格子模型の世界では，まさに“新時代を画する”という言葉どおりの意味で epoch-making なことだった．この量子群の誕生から XXZ 模型の相関関数の積分表示までの可解格子模型研究の発展を見るとき，数理物理学と数学のダイナミックな相互作用が現代においても脈々と受け継がれているように筆者には思える．

6. おわりに

ここまで，可解格子模型という可積分系があり，それと量子群が密接に関係することを解説してきたが，また別の興味深い可積分系である**箱玉系**（超離散可積分系とも言われる）も量子群と密接な関係があることが知られている．これについては，紙数も尽きたので他の解説[2)]に譲る．最後に，量子群の発見者の手になるすぐれた教科書[3)]を推薦して終わりとしたい．拙文を読まれて量子群と可積分系について興味を持った方に，続いて読んで頂けると筆者にとってはこの上ない喜びである．

参考文献

1) 横沼健雄：『テンソル積と外積代数』，岩波講座基礎数学．
2) 「数学セミナー」2006 年 3 月号の特集「連続と離散をつなぐ数学」参照．
3) 神保道夫：『量子群とヤン・バクスター方程式』，シュプリンガー現代数学シリーズ (1990).

（おかど・まさと，大阪大学大学院基礎工学研究科）

可積分系と共形場理論

山田　泰彦

1. はじめに

19 世紀の**可積分系**は十分な数の保存量があって求積で解ける微分方程式（主に力学の問題）の意味であったが，現在では，微分方程式に限らず，場の理論や統計力学，さらには完全に離散的なセル・オートマトンまでいろいろな可積分系がある．

一方，**共形場理論**は特別な対称性をもつ場の量子論であり，現代の様々な可積分系との間に接点を見出すことができる．ここでは，ソリトン方程式の典型である **KdV 方程式**との繋がりについて故きを温ねてみよう．

2. KdV 方程式の保存量

未知関数 $u = u(x,t)$ に関する方程式

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

を KdV 方程式と言う（添字は微分を表す）．この方程式には**無限個の保存量**

$$\begin{aligned} I_1 &= \int u dx, \\ I_3 &= \int u^2 dx, \\ I_5 &= \int (2u^3 + u_x^2) dx, \\ I_7 &= \int (5u^4 + 10uu_x^2 + u_{xx}^2) dx \end{aligned} \tag{1}$$

が知られている．例えば I_1, I_3 が保存することは

$$\begin{aligned} (u)_t &= (u_{xx} - 3u^2)_x, \\ (u^2)_t &= (-4u^3 + 2uu_{xx} - u_x^2)_x \end{aligned}$$

より導かれる．一般の I_n の作り方はこの節の最後に紹介しておいた．

無限個の保存量の問題に突破口を開いたのは R. Miura である（1966 年）．有難いことに本人による興味深い解説が日本語で読める[2]．それまでに彼は 9 個の保存量を得ていた．今でこそ，この種の計算は普通のパソコンでも瞬時にやってしまうのだが，当時は計算機もソフトウエアも全く貧弱であり，まだ手計算が頼りの時代である．さらに，9 個でおしまいという説まであったらしい．そんなデマにも屈せず 10 個目に挑戦し，それを成し遂げた勇気と腕力にはただただ敬服である．

Miura はさらに**変形 KdV 方程式**（mKdV）

$$q_t = q_{xxx} - 6q^2 q_x$$

の保存量も調べ，その結果から次の重要な事実を発見した．すなわち，KdV 方程式は

$$u = q^2 - q_x$$

という変換（**Miura 変換**）で mKdV 方程式より得られるのである．Miura 変換は q の方程式としては Riccati 方程式なので $q = -(\log\psi)_x$ として次のように線形化できる

$$(\partial_x^2 - u)\psi = 0. \tag{2}$$

KdV 方程式の解 u に 2 階微分作用素 $L=\partial_x^2-u$ を対応させ，その固有値問題

$$L\psi=k^2\psi$$

を考えることは**逆散乱法**のアイデアの元となった．例えば，この固有値問題の形式解を

$$(\log\psi)_x=k+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_n}{(2k)^n}$$

とおけば，漸化式

$$w_{n+1}=(w_n)_x-\sum_{i=1}^{n-1}w_iw_{n-i}$$

から

$$\begin{aligned}w_1&=u,\\ w_2&=-u_x,\\ w_3&=u_{xx}-u^2,\\ w_4&=(-u_{xx}+2u^2)_x,\\ w_5&=(w_4-2uu_x)_x+u_x^2+2u^3\end{aligned}$$

と求められ，これから（奇数の n について）

$$I_n=(\mathrm{const.})\int w_n dx$$

とすれば無限個の保存量が導かれる（n が偶数の場合は w_n が x の微分の形になっており I_n は自明となる）．

3. 量子 KdV

(m)KdV 方程式は Hamilton 形式

$$q_t=\{q,H\},\quad u_t=\{u,H\}$$

に書ける．ここで，q 変数の Poisson 括弧は

$$\{q(x),q(y)\}=\frac{1}{2}\delta'(x-y)$$

で与える．$\delta(x)$ はデルタ関数，$\delta'(x)$ はその微分を表す．これから $u=q^2-q_x$ については，

$$\{u(x),u(y)\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\partial_x^3+2u(x)\partial_x+u_x(x)\right)\delta(x-y)$$

となる．

Hamiltonian H は $H=I_3$ ととればよい．実は，$I_1,I_3,I_5,\cdots$ を Hamiltonian とすることも可能であり，それらは無限個の時間変数 $t_1,t_3,t_5,\cdots$ に対する方程式系

$$\mathcal{O}_{t_n}=\{\mathcal{O},I_n\},\quad (n=1,3,5,\cdots)$$

（KdV 階層）を与える．I_n はすべての時間発展の下で保存され，しかも互いに Poisson 可換となることが知られている

$$(I_m)_{t_n}=0,\quad \{I_m,I_n\}=0.$$

Hamilton 形式に書かれれば，正準量子化が考えられる．つまり，Poisson 括弧を交換子に読み替えればよい．実際，共形場理論で活躍する**自由ボソン代数** $[a_m,a_n]=m\delta_{m+n,0}$，および，**Virasoro 代数**

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}\qquad(3)$$

は，変数 $q(x),u(x)$ の Poisson 構造の量子版と見なすことができる．さらに，Miura 変換の量子版として，L_n を a_n たちの 2 次式で表す Feigin–Fuchs 表示（自由場表示）が対応する．

1987–88 年頃，Sasaki–Yamanaka は Virasoro 代数のテクニックを用いて量子 KdV 方程式の保存量を考察した[3]．彼らの計算は Zamolodchikov[4] や Eguchi–Yang[5] により**共形場理論の可積分変形**の観点から考察された．その背景などについては以下に述べるが，より詳しい内容は，Yang 氏自身による優れた解説[1]を是非参照願いたい．

4. 古典共形場理論

「共形場理論の可積分変形」の意味を理解するには，Feigin–Frenkel[7] に従って，古典版共形場理論の可積分変形を並行して考えることが有効である．

2 次元の Laplace 方程式は複素座標で書けば

$$\varphi_{z\bar{z}}=0$$

である．$f(z),g(\bar{z})$ を任意の正則関数および反正則な関数として（互いに共役でなくてもよい）

$$\varphi=f(z)+g(\bar{z})$$

が解になる．z を z の任意関数で置き換えても解

であることは変わらない（$\bar{z}$ についても同様である）．この意味で 2 次元 Laplace 方程式は**共形不変**である．Laplace 方程式の右辺を少し細工した

$$\varphi_{z\bar{z}} = e^{2\varphi}$$

という方程式を **Liouville 方程式**と言う．この方程式は z と $\bar{z}$ が混ざり合っているが

$$u = \varphi_z^2 - \varphi_{zz}$$

とすると

$$\begin{aligned} u_{\bar{z}} &= 2\varphi_z\varphi_{z\bar{z}} - (\varphi_{z\bar{z}})_z \\ &= 2\varphi_z e^{2\varphi} - (e^{2\varphi})_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり，u は z のみの関数である．同様に，$v = \varphi_{\bar{z}}^2 - \varphi_{\bar{z}\bar{z}}$ は $\bar{z}$ のみの関数となる．このことは，Liouville 方程式の共形不変性を示唆している．実際 $f(z), g(\bar{z})$ を任意の正則関数および反正則な関数として

$$e^{2\varphi} = \frac{f_z g_{\bar{z}}}{(1-fg)^2}$$

が解になることは，（見つけ方はともかく）確かめるのは難しくない．

以下では $z, \bar{z}$ は複素共役である必要はないので，独立な変数として扱おう．記号も $z = x$, $\bar{z} = s$ と書き換えて，Liouville 方程式を

$$\varphi_{zs} = e^{2\varphi}$$

と書くことにする．この右辺をさらに変形して **sinh–Gordon 方程式**

$$\varphi_{xs} = e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}$$

を考える．これを Liouville 方程式の変形（摂動）と見なすことが「可積分変形」の基本的な考えである．この変形で Liouville 方程式の共形不変性は壊され $u = \varphi_x^2 - \varphi_{xx}$ は s にも依存する．実際

$$u_s = -4e^{-2\varphi}\varphi_x$$

となる．それでも

$$u_s = (2e^{-2\varphi})_x, \quad (u^2)_s = (4e^{-2\varphi}\varphi_x^2)_x$$

などから

$$\begin{aligned} I_1 &= \int u dx, \\ I_3 &= \int u^2 dx, \\ I_5 &= \int (2u^3 + u_x^2) dx \end{aligned}$$

などが s によらない保存量となることがわかる．実は，これらの保存量は (m)KdV のそれ (1) と同じものである．

保存量が一致する理由は，(m)KdV と sinh–Gordon が両立する方程式系になっていることによる[6]．これは，三つ巴の Lax 方程式

$$(B_a)_b - (B_b)_a + [B_a, B_b] = 0$$

$(a, b = x, t, s)$ として表される．ここに

$$\begin{aligned} B_x &= \begin{bmatrix} q & 1 \\ z & -q \end{bmatrix}, \\ B_t &= 4zB_x - \begin{bmatrix} q^3 - q_{xx} & 2(q^2 + q_x) \\ 2z(q^2 - q_x) & -q^3 + q_{xx} \end{bmatrix}, \\ B_s &= \begin{bmatrix} 0 & e^{2\varphi}z^{-1} \\ e^{-2\varphi} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$(q = \varphi_x)$ である．こうして，共形場理論のある種の変形は可積分な sinh–Gordon 理論となり，同時に (m)KdV の保存量を与えることがわかった．このことは量子論においても成り立っている．

5. 遮蔽作用素

（量子）共形場理論では，ボソンの表現空間において Virasoro 代数と可換な**遮蔽作用素**が存在し，特異ベクトルの構成，相関関数の積分表示などで中心的な役割を担う（例えば文献 11)）．遮蔽作用素が重要である理由は，それとの可換性が Virasoro 代数を特徴づけることにある．

Virasoro 代数の表現空間の古典版は u の微分多項式であり，同様に，q の微分多項式は自由ボソンの表現空間の古典類似である．遮蔽作用素について上で述べたことを古典論に翻訳すれば，q の微分多項式が u の微分多項式にまとまるための条件が遮蔽作用素との（Poisson）可換性であると言える．このことの意味を可積分変形の観点から見ておこう．古典論の遮蔽作用素を積分

$$Q_1 = \int e^{2\varphi} dx$$

で定める．$q = \varphi_x$ より

$$\{\varphi(x), q(y)\} = \frac{1}{2}\delta(x-y)$$

とすることができ，

$$\begin{aligned}\{Q_1, q(x)\} &= \int \{e^{2\varphi(y)}, q(x)\} dy \\ &= \int \delta(y-x) e^{\varphi(x)} dy \\ &= e^{2\varphi(x)}\end{aligned}$$

となる．そこで，Q_1 を Hamiltonian とする時間発展を考えると

$$\varphi_{xs} = q_s = \{Q_1, q(x)\} = e^{2\varphi(x)}$$

となり，これは Liouville 方程式である．Liouville 方程式が共形不変であり，$u = q^2 - q_x$ が s に依存しないということは，u（およびその微分多項式）が Q_1 と可換ということに他ならず，逆に q の微分多項式で Q_1 と可換なものだけが u の微分多項式に書けるのである．

ここでさらに，もう一つの摂動作用素

$$Q_0 = \int e^{-2\varphi} dx$$

に対しても Poisson 可換となることを要求すると u たちの特別な微分多項式の積分 $I_1, I_3, \cdots$ のみが保存量として生き残るわけである．

図式的に整理すれば次のようになる．

Laplace	q の微分多項式	条件なし
Liouville	u の微分多項式	Q_1 と可換
sinh–Gordon	$I_1, I_3, \cdots$	Q_1, Q_0 と可換

以上は $\mathfrak{sl}_2$ の場合であるが，古典・量子とも任意のルート系について同様のことが分っている[7)]．Liouville/sinh–Gordon に対応するのは Toda/affine Toda である．

6. 非対数的条件と特異ベクトル

微分方程式 (2) で u が高々 2 位の極の場合

$$\psi_{xx} = u\psi, \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} l_{-n} x^{n-2}$$

は特に重要である（Fuchs 型）．その解を，級数

$$\psi = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 = 1$$

の形に求めよう．指数 ρ の決定方程式，および係数の漸化式は

$$l_0 = \rho(\rho - 1),$$

$$n(n-1+2\rho)c_n - \sum_{i=0}^{n-1} l_{i-n} c_i = 0$$

となる．これより $1 - 2\rho = s$, $(s \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ の場合，c_s が整合的に決まるための条件として，次の関係式が得られる

$$\begin{aligned} s=1:&\ l_{-1} = 0, \\ s=2:&\ l_{-1}^2 - l_{-2} = 0, \\ s=3:&\ l_{-1}^3 - 4l_{-2}l_{-1} + 4l_{-3} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

これらを満たさない場合は解に対数項が現れるので，これを**非対数的条件**と言う．$l_0 = (s^2-1)/4$ より，s が負の整数でも事情は同じで，実際，決定方程式のもう一方の根 $1 - \rho = (1+s)/2$ に対する解から同じ条件 (4) が現れる．

量子論でこれに対応するものが**特異ベクトル**である．重み h の最高重みベクトル $|\, h \,\rangle$:

$$L_n |\, h \,\rangle = 0, \ (n > 0), \quad L_0 |\, h \,\rangle = h |\, h \,\rangle$$

から生成される Virasoro 代数 (3) の表現空間において，最高重み条件 $L_n |\, \chi \,\rangle = 0$, $(n > 0)$ を満たすベクトルを特異ベクトルと言う．r, s を整数 $(rs \geq 1)$ として，パラメータが

$$c = 13 - 6\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

$$h = h_{r,s} = \frac{(rt-s)^2 - (t-1)^2}{4t}$$

のとき，特異ベクトル $|\, \chi_{r,s} \,\rangle$ がある．$r = 1$ の場合の例は

$$\begin{aligned} &L_{-1} |\, h_{1,1} \,\rangle, \\ &\left(L_{-1}^2 - \frac{1}{t} L_{-2}\right) |\, h_{2,1} \,\rangle, \\ &\left(L_{-1}^3 - \frac{4}{t} L_{-2} L_{-1} + \left(\frac{4}{t^2} - \frac{2}{t}\right) L_{-3}\right) |\, h_{3,1} \,\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

である．(4) は (5) の古典極限になっており，その

関係は一般の $\left|\chi_{1,s}\right\rangle$ で成立する．

以上をMiura変換で考えることも自由場表示との関係で意味がある．

$$\varphi = a_0 \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} x^n,$$

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} x^{n-1}$$

$(a_0 = -\rho = (s-1)/2)$ とすると，これから得られる $u = q^2 - q_x = \sum_{n=0}^{\infty} l_{-n} x^{n-2}$ は

$$\begin{aligned} l_0 &= \rho(\rho-1), \\ l_{-1} &= -2\rho a_{-1}, \\ l_{-2} &= a_{-1}^2 - a_{-2} - 2\rho a_{-2}, \\ l_{-3} &= -2(\rho+1)a_{-3} + 2a_{-2}a_{-1} \end{aligned} \tag{6}$$

である．

$s > 0$ の場合：例えば $s = 2$ $(\rho = -1/2)$ のとき，$l_{-2} = l_{-1}^2$ となり特異ベクトルの条件は自動的に満たされる（自由場表示の余特異ベクトル）．

$s < 0$ の場合：微分方程式 (2) の独立解は $\psi_1 = e^{-\varphi}$, $\psi_2 = \psi_1 \int^x e^{2\varphi} dx$ で与えられ，ψ_2 の非対数条件として

$$\operatorname*{Res}_{x=0} \left(e^{2\varphi} dx \right) = 0,$$

を得る（左辺は遮蔽作用素 Q_1 である）．$s = -3$ の場合この条件は $a_{-3} + 3a_{-2}a_{-1} + 2a_{-1}^2 = 0$ となる．(6) を用いて書き換えれば (4) の $s = 3$ の場合になる（自由場表示の特異ベクトル）．

なお，ある種の特異ベクトルを零にしないで残したような共形場理論の研究も進んでいる．これは一部の相関関数に対数項が現れるので**対数的共形場理論**と呼ばれている．

7. Gaudin 模型

V_j を $\mathfrak{sl}_2$ の $2j+1$ 次元既約表現空間とする．そこに作用する角運動量作用素 $\mathbf{S} = (S^x, S^y, S^z)$ は $\frac{1}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} = \Delta_a = j(j+1)$ と規格化されているとする．例えば $j = 1/2$ であれば $\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ であり，$\sigma^x = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$, $\sigma^y = \begin{bmatrix} & -i \\ i & \end{bmatrix}$, $\sigma^z = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ はPauli行列である．

$\mathfrak{sl}_2$ の **Gaudin 模型**は，テンソル積空間

$$V = V_{j_1} \otimes \cdots \otimes V_{j_N}$$

における，次の作用素の同時対角化問題である．

$$H_a = \sum_{b(\neq a)=1}^{N} \frac{\mathbf{S}_a \cdot \mathbf{S}_b}{z_a - z_b} \quad (1 \leq a \leq N).$$

ただし，$\mathbf{S}_a$ はテンソル積の a 番目成分 V_{j_a} に作用する．**Bethe 法**によると，H_a の固有値 h_a は

$$h_a = \sum_{b(\neq a)=1}^{N} \frac{2j_a j_b}{z_a - z_b} - \sum_{i=1}^{m} \frac{2j_a}{z_a - t_i}$$

で与えられる．ここに $t_1, \cdots, t_m$ はBethe方程式

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{j_a}{t_i - z_a} - \sum_{j(\neq i)=1}^{m} \frac{1}{t_i - t_j} = 0$$

の解である．さらに，h_a が固有値であることは

$$u = \sum_{a=1}^{N} \left[\frac{\Delta_a}{(z-z_a)^2} + \frac{h_a}{z - z_a} \right] \tag{7}$$

に対する微分方程式

$$(\partial_z^2 - u) y(z) = 0 \tag{8}$$

が非対数的であることと言い替えられる．これは，Bethe 方程式を満たす $\{t_i\}$ より，

$$q = \sum_{a=1}^{N} \frac{j_a}{z - z_a} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{z - t_i}$$

とするとき，(7) の u が $u = q^2 - q_z$ と書けることから従う（E. Frenkel, '95）．

唐突にGaudin模型の話に振ってしまったが，実はこれも量子KdVに関係がある．'99から'01にかけて，Dorey–Tateo[8)]，Bazhanov–Lukyanov–Zamolodchikov[9)]は，量子KdV等の保存量（IM = Integrals of Motion）の固有値問題とある種の常微分方程式との不思議な関係を見出した（**IM/ODE 対応**）．Feigin–Frenkel[10)]によれば，これは**幾何的**

Langlands 対応の帰結であり，対応する ODE は **affine** 化された Gaudin 模型において (8) に相当するものと解釈される．IM 側の (2) と ODE 側の (8) は同じように見えるが意味は全然違う．実際 $\mathfrak{sl}_2$ では見にくいが，一般には Langlands 双対を通して対応すると言う．このあたりを探れば温故而知新となるかもしれない．

論文[10]において “Miura” は 56 回登場する（電子的文献は便利である）．一見単純な式 $u = q^2 - q_x$ から，豊かなアイデアが尽きることなく湧き続けている．

参考文献

1) 梁 成吉，“2 次元共形場理論の変形問題”，『数理物理への誘い 3』，江沢洋編（遊星社，2000）．
2) ロバート・ミウラ（梶原健司・及川正行訳），“ソリトンと逆散乱法：歴史的視点から (1)–(2)”，「数学セミナー」2008 年 8 月号–9 月号．
3) R. Sasaki and I. Yamanaka, “Field Theoretical Construction of an Infinite Set of Quantum Commuting Operarors Related with Soliton Equation”, *Comm. Math. Phys.* **108** (1987) 691–704.
4) A.B. Zamolodchikov, “Integrable Field Theory from Conformal Field Theory”, *Advanced Studies in Pure Math.* **19** (1989) 641–674.
5) T. Eguchi and S.-K. Yang, “Deformations of conformal field theories and soliton equations”, *Physics Letters* **B224**, (1989), 373–378.
6) V. Drinfeld and V. Sokolov, “Lie algebras and KdV type equations”, *J. Sov. Math.* **30** (1985) 1975–2036.
7) B. Feigin and E. Frenkel, “Integrable Systems and Quantum Groups”, Proceeding of C.I.M.E. Summer School, *Lect. Notes in Math.*, **1620**, 349–418 (1996) (hep-th/9310022).
8) P. Dorey and R. Tateo, “Anharmonic oscillators, the thermodynamic Bathe Ansatz, and nonliner integral equations”, *J. Phys. A* **32** (1999) L419. arXiv:hep-th/9812211.
9) V. Bazhanov, S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, “Spectral determinants for Schrödinger equation and Q-operators of conformal field theory”, *J. Stat. Phys.* **102** (2001) 567–576;
–, “Higher-level eigenvalues of Q-operators and Schrödinger equation”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2004) 711–725.
10) B. Feigin and E. Frenkel, “Quantization of soliton systems and Langlands duality”, arXiv:0705.2486
11) 山田泰彦，数理物理シリーズ 1，『共形場理論入門』，土屋昭博・砂田利一共編（培風館，2006）．

（やまだ・やすひこ，神戸大学大学院理学研究科）

可積分系と弦理論

酒井　一博

1. 可積分系はなぜ現れるか

弦理論には可積分系がよく現れる．なぜだろうか？弦理論の特性を考えるといくつも理由が考えられるのだが，それだけでは何かが足りない気がする．それは理論を探る側の問題である．できれば厳密に解いて理解したい，何かしらそのような仕組みがあるのでは，と期待しながら眺めるので，可積分系がよく目にとまるということがあるのではないか．あるいはもっと率直に，弦理論屋に可積分系好きが多いということはないだろうか．

可積分系も弦理論も，物理なのか数学なのか白黒つけられない，その中間に位置する分野である．両分野の研究者の嗜好に共通する部分があっても不思議はない．歴史を振り返ってみても，1980年代は超弦理論や共形場理論，可解格子模型や可積分な場の理論が同時に発展を遂げており，分野間の刺激や交流も少なくなかっただろう．1990年代初めの弦理論の冬の時代には可積分系関連の研究で食いつないでいたという弦理論屋の話も耳にする．可積分系好きが多いかはともかく，ベテランの弦理論屋の方々の多くは可積分系の素養を持っているように思われる．

1990年代後半は，Dブレインや弦双対性の旋風により弦理論の高次元理論としての側面に光が当たっていた時代で，弦理論と可積分系にはやや隔たりがあった．当時大学の学部生だった筆者は，素粒子理論と可積分系と両方に興味があったが，大学院に進むにあたっては選択を迫られた．結局両方の研究室の面接を受けたが，当時は素粒子理論をとるか，可積分系をとるか，どちらか一方しかないと思い込んでいた節がある．

ところがここ最近は弦理論と可積分系の分野が再び距離を縮めている．その主な背景には2003年頃からの **AdS/CFT** 対応（背景に anti-de Sitter 時空を含む弦理論と共形不変なゲージ理論の等価性の予想）における可積分性の研究の進展がある．「ゲージ理論と弦理論における可積分性」と題した国際研究会が2005年以来毎年夏にヨーロッパで行われているが，そこには素粒子理論と可積分系の双方の分野から最近では100人を超える研究者が集まり，席を並べて最新の研究成果の理解に努めている．筆者は弦理論屋としてこの研究会に参加しているが，仮に大学院で可積分系の道に進んでいたとしても，案外同じ場に来ていたのかもしれない．

さて，厳密に解けることに喜びを感じ，弦理論の中に可積分構造を追い求める研究者（つまり筆者のような人間）がどれだけいたとしても，もちろんそれだけでは可積分系が現れる理由にはならない．弦理論の特性上の理由があるはずである．その主だったものとして考えられるのは

1. 大きな対称性，特に超対称性，
2. 2次元理論としての特質，
3. 理論の守備範囲の広さ

といったところだろうか．

1. について，場の理論のような無限自由度の系が可積分であり，実際に厳密に解くことができる場合には，まず背景に何らかの大きな対称性があると考えて間違いない．対称性の中でも特に超対称性は場の理論のダイナミクスを統制し，確実に解きやすくする．超弦理論は最大で32個の超対称性を持つ非常に対称性の大きな理論である．実際の研究の舞台としても，その全部あるいは一部を保つ設定がよく取り上げられる．そのような設定を好んで取り上げるのは我々研究者ではあるが，理論に元々大きな対称性があって初めてでき

ることである．無い袖は振れない．

2. について，2次元以下の理論では，対称性がダイナミクスを凌駕して厳密に解ける場合がしばしば現れる．実際現在知られている可積分系は，おそらくほとんどすべてが2次元以下の系である．3次元以上で可積分性が現れる場合でも，何らかの意味で2次元以下の理論とつながりがある．弦理論は，高次元時空を動く弦を外側から見る描像と，弦が時間発展によって描く2次元世界面の内側から見る描像と，二重構造を持つ．世界面理論は多くの場合共形場理論によって記述され，そこではVirasoro代数の無限次元対称性が現れる．また，共形場理論以外による記述の場合でも，何らかの無限次元対称性が現れることがある．

3. について，弦理論は様々な場の理論の親玉のようなところがある．弦理論は素粒子物理の統一理論の候補という性格上，ゲージ理論，重力理論を含んでいる．また弦の世界面理論は通常2次元共形場理論で記述される．これらそれぞれの場の理論において，ある設定の下で可積分系の構造が現れる．するとそれは自動的に弦理論の一部ということになる．

重力理論，共形場理論と可積分系の関係についてはそれぞれ前田恵一・野澤真人両氏，山田泰彦氏の解説を読んでいただくことにして，ここではゲージ理論と可積分系の関係を思い出してみよう．4次元ゲージ理論一つをとってみても，可積分系はいくつもの異なる局面で顔を出す．例えば，インスタントン構成の出発点となる自己双対方程式はLax表現を持ち，（相当大仕掛けではあるが）古典可積分系と見なせる[1]．また $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論においては，Seiberg–Witten解と1次元可積分系の対応が知られている[2]．あるいは最近ではラージ N 極限の4次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論と1次元量子スピン鎖や粒子模型との関係が活発に研究されている[3]．他の次元のゲージ理論まで考えると，枚挙にいとまがない．

2. 定曲率空間上の古典弦理論

弦理論は時空の中を動く弦の理論として導入されるが，我々が実際に理論を調べるにあたっては，具体的に弦の動きを追っていることは少ない．むしろ，あるときは共形場理論，あるときはゲージ理論や重力理論というように，既存の場の理論に帰着させて解いていることが多い．同じ対象を扱うにも様々な切り口があり，場の理論で培われた技術を流用できるのは，弦理論の強みでもある．その技術の一つとして，ゲージ理論や重力理論，共形場理論に現れる可積分性も弦理論の中において確かな重要性を持っている．

そうは言うものの，仮にも本稿の表題は「可積分系と弦理論」と銘打ってあるのだから，ここでは最も「弦」理論らしい可積分系を見てみることにしよう．考えるのは定曲率空間上の古典弦理論である．古典論といっても決して本棚の奥で埃をかぶった理論ということではなく，この可積分系は応用上の重要性もあって現在も弦理論・ゲージ理論研究の最先端で調べられている．実際の研究における役割については最後に5節で触れる．

簡単な具体例として，以下では $\mathbb{R}_t \times S^3$ 上の古典弦理論を考えてみよう[4)*1)]．この模型の世界面作用は以下で与えられる．

$$S = -\frac{R^2}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma \times\Bigl(\partial_a\vec{X}\cdot\partial^a\vec{X} - \partial_a X_0\partial^a X_0 + \Lambda(\vec{X}^2-1)\Bigr). \tag{1}$$

弦理論の世界面作用は様々な形に書けるが，ここでは最も標準的な形（Polyakov作用の共形ゲージ固定）を用いた．記号の意味を順番に説明しよう．まず世界面 Σ の座標は

$$\sigma^0 = \tau, \quad \sigma^1 = \sigma \tag{2}$$

で表すことにする．τ は弦の時間発展の方向であり，σ は弦に沿った方向である．$\partial_a = (\partial/\partial\sigma^a)$ は世界面座標についての微分である．添字 $a=0,1$ はMinkowski計量で上げ下げし，和をとる．$X_0(\tau,\sigma)$, $\vec{X}(\tau,\sigma)$ はそれぞれ $\mathbb{R}_t$, S^3 内の弦の位置を表す．ただし S^3 内の位置については，ここではまず直交座標 $\vec{X}\in\mathbb{R}^4$ を導入し，補助場 $\Lambda(\tau,\sigma)$ についての運動方程式 $\vec{X}^2-1=0$ が S^3 上への拘束を与える仕組みとなっている．R は S^3 の半径，α' は結合定数である．

ここで対称性について述べておこう．まず大域的対称性としては，X_0 の並進不変性に加え，S^3 の等長

*1) この模型はそれ自身で独立した弦理論ではなく，本物の弦理論の古典解の一部を見るための模型と解釈されるべきである．例えば $\mathbb{R}_t$ を AdS_5 時空の時間方向，S^3 を S^5 内の最大3次元球面と見なせば，この模型の古典解はそのまま $AdS_5\times S^5$ 時空上の超弦理論の古典解となる．一方で(1)の作用から出発して量子化を行っても弦理論のスペクトルは得られない．弦理論が量子論的にも無矛盾であるためには，背景時空全体の次元や形，背景場の配位が様々な条件を満たす必要がある．

変換群として直交群 $O(4)$ が $\vec{X}$ に作用する．さらに，F, G を任意の正則関数として，作用は座標変換

$$\sigma^+ \to \tilde{\sigma}^+ = F(\sigma^+), \quad \sigma^- \to \tilde{\sigma}^- = G(\sigma^-) \qquad (3)$$

の下で不変である．すなわち今考えている模型は古典的には共形不変性を持つ*2)．これらの大域的・局所的対称性が可積分性の源とも言える．

さて，作用の変分をとることで運動方程式が得られる．補助場 Λ を消去した形で運動方程式は

$$\partial_+\partial_-\vec{X} + (\partial_+\vec{X}\cdot\partial_-\vec{X})\vec{X} = 0, \quad \vec{X}^2 = 1, \qquad (4)$$

$$\partial_+\partial_- X_0 = 0 \qquad (5)$$

となる．ただし世界面における光錐座標

$$\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^0 \pm \sigma^1), \quad \partial_\pm = \partial_0 \pm \partial_1 \qquad (6)$$

を導入した．弦理論では運動方程式に加えて Virasoro 条件を満たす必要がある．古典論の場合これは全体のエネルギー・運動量テンソルが零となる要請であり，今の場合は

$$(\partial_\pm \vec{X})^2 - (\partial_\pm X_0)^2 = 0 \qquad (7)$$

と表せる．古典論としての問題は，(4), (5), (7) を適当な境界条件ないしは初期条件の下に解くということに集約される．

ここまで世界面 Σ の形については言及してこなかった．弦理論において，世界面のトポロジーは弦の相互作用過程を表す．ここでは弦の相互作用が全く起きない過程を考えよう．これは弦が途中で分かれたりつながったりせず，始めから終わりまで一つのままであることを意味する．また弦理論では閉弦と開弦と両方の場合が考えられ，どちらも重要であるが，ここでは閉弦を考えることにする．相互作用しない閉弦の世界面としては，σ 座標を周期 2π で同一視し，

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 \le \sigma < 2\pi \qquad (8)$$

で張られる円柱面を考えればよい．

X_0 の運動方程式 (5) は 1 次元の波動方程式であり，すぐに解ける．世界面の境界条件を満たす解で共形変換 (3) の自由度を固定する解として，以降

$$X_0(\tau, \sigma) = \kappa\tau, \quad \kappa > 0 \qquad (9)$$

をとることにしよう．このとき，Virasoro 条件 (7) は

$$(\partial_\pm \vec{X})^2 = \kappa^2 \qquad (10)$$

と書ける．結局問題は (10) の拘束の下で方程式 (4) を解く，という形にまで簡素化された．

さて，方程式 (4) の解を探してみよう．(4) は非線形だが見た目はそれほど複雑ではなく，何でもよいから解を見つけてくることはさほど難しくない．$\vec{X}$ の成分を X_j $(j = 1, \ldots, 4)$ と表すことにして，例えば

$$X_1 + iX_2 = e^{i\kappa\tau}, \quad X_3 + iX_4 = 0 \qquad (11)$$

は，σ に依らない，つまり弦が常に一点につぶれた解で，(10) の拘束を満たす解の中で最も簡単なものである．また，弦の時間変化は回転のみで形は変えないという仮定をおいて解くと，一般には楕円関数で表される解が得られる．その中でも folded string 解

$$X_1 + iX_2 = k\,\mathrm{sn}(\lambda\sigma)e^{i\omega_1\tau}, \quad X_3 + iX_4 = \mathrm{dn}(\lambda\sigma)e^{i\omega_2\tau}, \qquad (12)$$

$$\lambda = \frac{2n}{\pi}K(k), \qquad (13)$$

$$\omega_1^2 = \kappa^2 + (1-k^2)\lambda^2, \quad \omega_2^2 = \kappa^2 - k^2\lambda^2 \qquad (14)$$

や circular string 解

$$X_1 + iX_2 = \mathrm{sn}(\lambda\sigma)e^{i\omega_1\tau}, \quad X_3 + iX_4 = \mathrm{cn}(\lambda\sigma)e^{i\omega_2\tau}, \qquad (15)$$

$$\lambda = \frac{2n}{\pi}K(k), \qquad (16)$$

$$\omega_1^2 = \kappa^2 - (1-k^2)\lambda^2, \quad \omega_2^2 = \kappa^2 - \lambda^2 \qquad (17)$$

などは基本的な解として，よく知られている（図 1）．ここで n は巻きつき数を表す自然数，k は楕円関数の母数であり，$K(k)$ は第 1 種完全楕円積分である．κ, k, n の値は $\lambda, \omega_1, \omega_2$ が実数となる範囲で自由に選べる．

しかし，時間とともに変形するような解まで含めて

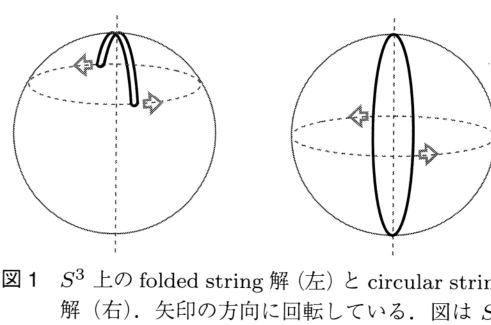


図 1　S^3 上の folded string 解（左）と circular string 解（右）．矢印の方向に回転している．図は S^3 内の S^2 断面における配位を表しており，実際はここで見えていない方向にも回転している．

*2)　$\mathbb{R}_t \times S^3$ 上に制限された作用 (1) から出発すると，量子論的には共形不変性は破れる．

くまなく解を求めようとするのは，一般にこのような非線形偏微分方程式では困難である．何らかの系統的な方法はないのだろうか．

3. 古典弦理論の可積分性

ここで可積分性の出番となる．可積分性を活用すると系統的に一般解を求めることができる．まず最初に準備として，同型写像

$$g = \begin{pmatrix} X_1 + iX_2 & X_3 + iX_4 \\ -X_3 + iX_4 & X_1 - iX_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

を用いて S^3 の座標を $SU(2)$ 群の元として表そう*3)．g から作られる右カレント

$$j = -g^{-1}dg \in \mathfrak{su}(2) \tag{19}$$

を考えると，運動方程式 (4) はカレントの保存則

$$d * j = 0 \tag{20}$$

として表せる．ここで $*$ は 2 次元世界面での Hodge 双対である．また j はその構成から零曲率方程式

$$dj - j \wedge j = 0 \tag{21}$$

を満たす．カレント j を

$$j = j_+ d\sigma^+ + j_- d\sigma^- \tag{22}$$

と成分表示するならば，(20), (21) はそれぞれ

$$\partial_+ j_- + \partial_- j_+ = 0, \tag{23}$$

$$\partial_+ j_- - \partial_- j_+ - [j_+, j_-] = 0 \tag{24}$$

と表せる．Virasoro 条件 (10) も

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, j_\pm^2 = -\kappa^2 \tag{25}$$

と書け，すべてを j の言葉で表すことができた．

ここで，

$$J_\pm(x; \tau, \sigma) = \frac{j_\pm}{1 \mp x} \tag{26}$$

を成分とする 1 形式 $J = J_+ d\sigma^+ + J_- d\sigma^-$ を導入しよう．x は形式的に導入した複素数パラメータで**スペクトルパラメータ**と呼ばれる．この J についての零曲率方程式

$$dJ - J \wedge J = 0 \tag{27}$$

は，x でべき展開してみるとすぐに分かるように実は (23), (24) と等価である．さらにこの式は，成分を用いれば次のように書ける．

$$[\partial_1 - J_1, \partial_0 - J_0] = 0. \tag{28}$$

この式には次のような解釈が成り立つ．今，線形微分演算子の対

$$\mathcal{L} = \partial_1 - J_1, \tag{29}$$

$$\mathcal{M} = \partial_0 - J_0 \tag{30}$$

から定義される 2 つの Dirac 型方程式

$$\mathcal{L}\Psi = 0, \quad \mathcal{M}\Psi = 0 \tag{31}$$

を同時に満たす解 $\Psi(x; \tau, \sigma)$ 考える．演算子 $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ はそれぞれ解の σ 発展，τ 発展を記述している．この解が局所的な発展の経路の選び方によらず一意に定まるための条件として

$$[\mathcal{L}, \mathcal{M}] = 0 \tag{32}$$

が現れる．

つまり，出発点では元々二階の非線形偏微分方程式だったのが，一階の連立線形微分方程式の解の整合性条件として表されたことになる．このように非線形方程式を線形化する表示は **Lax 表現**と呼ばれる．Lax 表現の存在は古典的な可積分性を保証し，実際に多くの古典可積分系の例で Lax 表現が知られている．

4. 有限ギャップ解

Lax 表現に基づくと様々な解が系統的に構成できる．ここではその中でも最も一般的な解の形を与える**有限ギャップ解**を紹介しよう．可積分系の話によく出てくるソリトン解も，有限ギャップ解の極限として得られる．

量子力学を思い出すと，Schrödinger 方程式においてポテンシャルが周期的であるとき，エネルギースペクトルにはバンド構造が現れる．このとき，ポテンシャルの選び方次第でバンド間のギャップが有限個になる場合がある．その場合のポテンシャルを有限ギャップポテンシャルと呼び，対応する Schrödinger 方程式の解を有限ギャップ解と呼ぶ．Lax 表現を持つ古典可積分系においても，同種の解が現れる．

有限ギャップ解を書き表す際には，**スペクトル曲線**と呼ばれる代数曲線が骨組みの役割を果たす．今考えている $\mathbb{R}_t \times S^3$ 上の古典弦理論の場合，スペクトル曲線は超楕円曲線

*3) S^3 の等長変換群 $O(4)$ の対称性を見るのに，一番簡単な表現としてスピノル表現を用いたと考えてもよい．

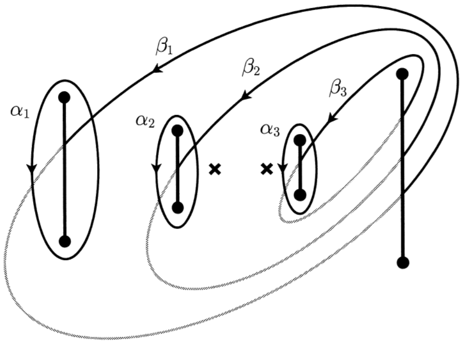


図 2　x 平面に射影したスペクトル曲線．●印は分岐点を表し，分岐点どうしを結ぶ直線は 2 枚の Riemann シートをつなぐカットを表す．×印の位置（$x=\pm1$）では Baker–Akhiezer 関数が特異性を持つ．

$$y^2 = \prod_{l=1}^{2g+2} (x - x_l) \quad \Bigl(\equiv P(x)\Bigr) \tag{33}$$

となる．この超楕円曲線は複素 x 平面（正確には無限遠点を含めた $\mathbb{CP}^1$）に射影して見てやると，2 枚のシートが $g+1$ 個のカットでつながった形をしており，種数 g の Riemann 面を記述する．Riemann 面上には例えば図 2 のように標準的な 1 サイクルの基底 α_k, β_k $(k=1,\ldots,g)$ をとっておく．

さて，種数 g の Riemann 面の上での関数を考えるとき，基本となるのは g 個の独立な正則微分形式である．超楕円曲線の場合，これらは簡単に書き下すことができ，例えば

$$\frac{x^k dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad k = 0, 1, \ldots, g-1 \tag{34}$$

で与えられる．特にこれらの線形結合をとることで，規格化直交条件

$$\oint_{\alpha_j} \omega_k = \delta_{jk} \tag{35}$$

を満たす基底 ω_k $(k=1,\ldots,g)$ がとれる．このとき

$$B_{jk} = \oint_{\beta_j} \omega_k \tag{36}$$

は周期行列と呼ばれる．周期行列を用いて，Riemann 面に付随する Riemann テータ関数を定義することができる．

$$\theta(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i \langle \boldsymbol{m}, B\boldsymbol{m} \rangle + 2\pi i \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{z} \rangle}. \tag{37}$$

ここで太字体で書かれた文字は g 成分ベクトルを表し，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{j=1}^{g} a_j b_j$ は内積を表す．Riemann テータ関数は g 変数の多重周期関数である．先に挙げた Schrödinger 方程式における有限ギャップポテンシャルは，この Riemann テータ関数を用いて表される．

さて，もう少しだけ準備を続けよう．有限ギャップ解を構成する際の一般的な方法では，まず補助的な線形問題 (31) の解を構成する[5]．このときの解 $\Psi(x;\tau,\sigma)$ は **Baker–Akhiezer 関数**と呼ばれる．Baker–Akhiezer 関数の構成の詳細には立ち入らないが，考え方としては，線形方程式の構造をもとに Baker–Akhiezer 関数の満たすべき性質，特に特異点構造と特異点まわりでの漸近的振舞いを列挙し，これらの性質を満たす解析関数を決定するという仕組みである．(29) 式で与えられていた線形微分演算子 $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ はその構成から，スペクトルパラメータに関して $x=\pm1$ に極を持つ．これに対応して，その解 $\Psi(x;\tau,\sigma)$ は $x=\pm1$ において真性特異点を持つ．この特異性を表すべく，スペクトル曲線上において $x=\pm1$ のそれぞれ一方に極を持つ有理型微分形式 $dp_\pm$ を用意する．極における振舞いは $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ の形から決まり，$dp_\pm$ は上側のシートで

$$dp_\pm = d\left(\frac{\kappa}{1 \mp x}\right) + \mathcal{O}\left((x \mp 1)^0\right) \tag{38}$$

という形をとる．（下側では全体に (-1) 倍がかかる．）極以外での形も解析性からほとんど決まり，条件

$$\oint_{\alpha_k} dp_\pm = 0, \quad k = 1, \ldots, g \tag{39}$$

を課すことで，残る正則形式分の不定性も固定される．

ここまで準備すると Baker–Akhiezer 関数を書き表すことができ，これを利用して元々の非線形問題の解 $\vec{X}(\tau,\sigma)$ も表すことができる．具体的には，

$$X_1 \pm iX_2 = \varphi_\pm^{(1)}, \quad X_3 \pm iX_4 = \varphi_\pm^{(2)} \tag{40}$$

と書くとき，有限ギャップ解は

$$\varphi_\pm^{(a)} = C_\pm^{(a)} \frac{\theta(\pm \boldsymbol{A}^{(a)} + \boldsymbol{U}_+ \sigma^+ + \boldsymbol{U}_- \sigma^- + \boldsymbol{Z})}{\theta(\boldsymbol{U}_+ \sigma^+ + \boldsymbol{U}_- \sigma^- + \boldsymbol{Z})} \times \exp\left[\pm\left(ip_+^{(a)}\sigma^+ + ip_-^{(a)}\sigma^-\right)\right] \tag{41}$$

と表される[6]．ここで $C_\pm^{(a)}$ は定数で規格化条件を満たすよう適切に選ぶ．$\boldsymbol{Z}$ は任意定数である．他は次で定義される．

$$\boldsymbol{U}_\pm = \frac{1}{2\pi} \oint_{\boldsymbol{\beta}} dp_\pm, \tag{42}$$

$$p_\pm^{(a)} = \int_{0^+}^{Q^{(a)}} dp_\pm, \tag{43}$$

$$\boldsymbol{A}^{(a)} = \int_{0^+}^{Q^{(a)}} \boldsymbol{\omega}, \tag{44}$$

$$Q^{(1)} = \infty^-, \quad Q^{(2)} = \infty^+. \tag{45}$$

ここで $x = 0^+, \infty^+$ は2枚ある Riemann シートのうち上側のシート上の点，$x = \infty^-$ は下側のシート上の点を表す．

有限ギャップ解は基本的には上の通りだが，このままではまだ $\vec{X}$ の実数性条件や世界面 Σ の境界条件を課していないため，完全な解にはなっていない．これらの条件を課すと，分岐点 x_l の位置は完全に任意ではなくなり，拘束を受ける．実数性条件は $\{x_l\}$ 全体の配位が x 平面の複素共役に関して不変となるような制限となる．また弦の σ 座標に関する周期性の条件は

$$p_+^{(a)} - p_-^{(a)} \;=\; 2n^{(a)}, \quad n^{(a)} \in \mathbb{Z}, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{U}_+ - \boldsymbol{U}_- \;=\; \frac{\boldsymbol{m}}{\pi}, \quad \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^g \tag{47}$$

と書け，これも x_l の配位に制限を与える．

最後に既知の解との関係について述べておこう．2節の最後で例に挙げた folded/circular string 解は，種数1の有限ギャップ解である．$g = 1$ のとき，スペクトル曲線は楕円曲線となり，Riemann テータ関数はよく知られている楕円テータ関数となる．特に2節の folded/circular string 解は，スペクトル曲線の分岐点の配位が $x \mapsto -x$ の鏡映に関して左右対称となる簡単な場合に対応している．別の例として，すべてのカットの長さが無限小に縮退する極限をとると，多重ソリトン解が得られる．

5. 終わりに

上で見てきた古典可積分系の例は，技術的には新しいものではないが，具体的な計算が論文として発表され注目を浴びるようになったのはごく最近のことである[4,6]．その背景には，AdS/CFT 対応における応用上の重要性がある．AdS/CFT 対応は，anti-de Sitter 時空を背景に含む弦理論と共形不変なゲージ理論が等価であるという主張で，1997年に Maldacena が提唱して以来，弦理論の分野で大変活発に研究されているテーマである．その代表例である $AdS_5 \times S^5$ 上の超弦理論と4次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論との対応において，2003年頃に可積分性が見出された．

弦理論側においては，古典論全体の Lax 表現が構成された．したがって，本稿で述べた方法は実は $AdS_5 \times S^5$ 上の超弦理論の古典解全体に適用できる．またゲージ理論側においては1ループ摂動（最初の摂動近似）において可積分な1次元量子スピン鎖の構造が現れた．AdS/CFT 対応にはゲージ理論の弱（強）結合領域が弦理論の強（弱）結合領域に対応するという重要な特徴がある．このためゲージ理論の弱結合領域で現れた量子スピン鎖の可積分性と弦理論の弱結合領域で現れた古典可積分性は直接重なりを持たない．しかしながら，両者を対応づけようとする試みの積み重ねの結果，両者を包含し，かつゲージ理論の高次摂動および弦理論の量子補正計算とつじつまの合う量子可積分模型の構造が浮かび上がってきた．この模型は，基本励起の分散関係式や二体散乱行列の具体形が分かっており，可積分系の分野でも知られていなかった新しい模型となっている[3]．

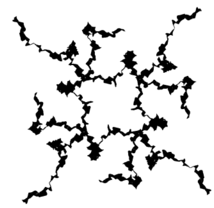
また AdS/CFT 対応に従えば，弦理論の古典極限はゲージ理論の強結合極限に対応しており，弦の古典解は場の理論の範疇では解けない問題を解き得る実用的な手段となる．例えば最近では4次元 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論のグルーオン散乱振幅の強結合極限が，AdS 時空上のある特定の境界条件を満たす開弦解の面積から計算できるという話があり，盛んに研究されている[7]．可積分性の応用も含めて，今後の展開が楽しみである．

参考文献

1) A.A. Belavin and V.E. Zakharov, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **25** (1977) 603.
2) 高崎金久，数理科学 1997年3月号．
3) 酒井一博，数理科学 2008年2月号．
4) V.A. Kazakov, A. Marshakov, J.A. Minahan and K. Zarembo, *JHEP* **0405** (2004) 024 [arXiv:hep-th/0402207].
5) E.D. Belokolos, A.I. Bobenko, V.Z. Enol'skii, A.R. Its and V.B. Matveev, "Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations," Springer-Verlag (1994).
6) N. Dorey and B. Vicedo, *JHEP* **0607** (2006) 014 [arXiv:hep-th/0601194]; *JHEP* **0703** (2007) 045 [arXiv:hep-th/0606287].
7) L.F. Alday and J.M. Maldacena, *JHEP* **0706** (2007) 064 [arXiv:0705.0303 [hep-th]]; L.F. Alday, *Fortsch. Phys.* **56** (2008) 816 [arXiv:0804.0951 [hep-th]].

（さかい・かずひろ，慶應義塾大学日吉物理学教室）

可積分系と重力



野澤 真人・前田 恵一

重力は我々にとって一番なじみ深い力である．本稿では，強重力現象を記述する一般相対論で登場する可積分系について概説する．

1. 始まりはKepler

人類が初めて発見した可積分系は，何を隠そう重力の働く力学系においてであった．400年ほど前，Keplerは太陽の周りの惑星の公転運動を観測し，有名なKeplerの3法則を発見した．もしこの惑星の運動が可積分でなかったら，Newtonは逆2乗則を定式化することがなかったかもしれない[*1)]．それだけ系が可積分であることは現象の理解にとって大きな助けとなるのである．

20世紀になると，万有引力の法則はEinsteinの提唱した一般相対論によって幾何学的描像へと姿を変えた．一般相対論は，等価原理と一般相対性原理に基づいて提唱された演繹的な理論であるが，Newton理論では説明できない太陽系近傍の観測結果を見事に説明し，強重力場をも正しく記述する最も信頼できる重力理論と考えられている．

一般相対論において，重力場は計量 g_{ab} によって表され，Einstein方程式

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi T_{ab}$$

を解くことにより決定される（本稿では $c = G = \hbar = 1$ の単位系を用いる）．R_{ab} はRicciテンソル，R はRicciスカラー，T_{ab} は物質のエネルギー運動量テンソルである．よく知られているように，Einstein方程式は計量 g_{ab} に関して2階の非線形偏微分方程式であるので，一般解を求める処方箋は存在しない．これが一般相対論で一番厄介な点であるのだが，この重力の非線形性は「質量とエネルギーの等価性」の必然的帰結であり，強重力場の理解には避けて通ることはできないものである．よって，一般相対論においても可積分系は重要な役割を担ってきたことがうかがえる．

一般相対論の特徴である時空のゆがみを顕著に表すものとしてブラックホールがある．ここでは可積分性に関連したブラックホールにまつわる2つのトピックを紹介しよう．次節では，ブラックホール時空における物体の運動についての可積分性に触れる．これは天体物理学的側面からも非常に重要な問題である．3節では，Einstein方程式そのものに対しての可積分性を議論する．Einstein方程式はある場合に可積分方程式へと帰着し，新たな厳密解の構築が可能となる．

非線形な物理現象を追究する際に指針となるのは対称性である．系に何らかの対称性があれば，解析的アプローチが期待でき，可積分性とも関連性を持つであろう．ここで具体的な話に入る前に，曲がった時空における対称性についてまとめておこう．時空の対称性は**Killing**ベクトル ξ^a の存在で特徴づけられる．Killingベクトルは，Killing

*1) Poincareによる可積分系と全く正反対のカオス現象の発見も天体運動からというのも興味深い．

方程式

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 2\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0$$

を満足するベクトル場で，ξ^a 方向に計量が不変であることを示している．ここで $\mathcal{L}_\xi$ は ξ^a 方向の Lie 微分，∇_a は共変微分，丸括弧は添字の対称化を表す．特に，Killing ベクトルが $\xi^a_{(\mu)} = (\partial/\partial x^\mu)^a$ のような座標ベクトルのときは，Killing 方程式は $\partial g_{ab}/\partial x^\mu = 0$ に帰着し，計量は座標 x^μ に依存しない．

2. Kerr 時空における測地線方程式

星が重力崩壊しブラックホールになるとすると，最終的に時空は定常状態に落ち着くであろう．このような動的変化のない時空において回転しているブラックホールを考えると，その時空解は**Kerr 計量**

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \frac{2M}{\rho^2}(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi)^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2+\rho^2\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\Delta}+\mathrm{d}\theta^2\right) \tag{1}$$

で記述される．ここで $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\rho^2 = r^2+a^2\cos^2\theta$ である．M はブラックホールの質量，$J = Ma(\leq M^2)$ は角運動量を表し，これらはそれぞれ時間並進対称性および軸周りの回転対称性に付随した保存量である．それらの対称性は Killing ベクトル $\xi^a_{(t)} = (\partial/\partial t)^a$, $\xi^a_{(\phi)} = (\partial/\partial\phi)^a$ で表される．

それでは，Kerr 時空において質量 m の粒子の運動を考えてみよう*2)．粒子は 4 次元時空中の測地線に沿って運動し，その 4 元速度 u^a $(u^a u_a = -1)$ は**測地線方程式** $u^b\nabla_b u^a = 0$ を満たす．測地線方程式は非線形偏微分方程式であるため，それを解く際には運動の積分（保存量）を見つけることがキーポイントとなる．

*2) 一般相対論の枠内では，粒子の運動に伴ってわずかながらも必ず重力波が放出されるはずであるが，ブラックホールに比べてその周りを周回する粒子が十分に軽い場合 $(m \ll M)$，そのような重力的反作用はひとまず無視することができる．

時空が Killing ベクトルを持つ場合は，測地線に沿った粒子の保存量を以下のようにして見つけることができる．Killing ベクトル ξ^a と 4 元速度の縮約をとった量 $\xi^a u_a$ を速度方向に微分すると

$$u^b\nabla_b(\xi^a u_a) = (u^b\nabla_b u^a)\xi_a + (\nabla_{(a}\xi_{b)})u^a u^b = 0,$$

が得られる．ここで右辺第 2 式では測地線方程式，および Killing 方程式を用いた．つまり $\xi^a u_a$ という量は，時空の対称性と密接に結びついた運動の積分である．

正準運動量を $p_a = mu_a$ とすると，Kerr 時空では粒子のエネルギー $E = -p_a\xi^a_{(t)}$，および角運動量の軸成分 $L_z = p_a\xi^a_{(\phi)}$ が粒子の保存量を与えることがわかる．また，$g^{ab}p_a p_b = -m^2$ であるから，系のハミルトニアン $H = \frac{1}{2}g^{ab}p_a p_b$ も運動の積分である．しかし，系の自由度（座標の数）は 4 であるのに対し，系の対称性に付随した第一積分は (E, L_z, H) の 3 つしかない．このままでは，測地線は可積分にならない．

では，Kerr 時空の周りでの粒子はカオス的振る舞いをするのであろうか？ 答えはノーである．Carter は，Kerr 時空における測地線の Hamilton–Jacobi 方程式を調べることにより，4 つ目の第一積分として r 方向と θ 方向の変数分離定数

$$K = p_\theta^2 + (L_z - aE\sin^2\theta)^2\sin^{-2}\theta + a^2m^2\cos^2\theta,$$

が存在することを発見した[1]．4 つの運動の定数 (E, L_z, H, K) は線形独立で，Poisson 括弧について互いに可換な保存量であるので，測地線は Liouville の意味で完全可積分となる*3)．

なぜこのような余分な保存量が存在するのであろうか？ このことは相対論に限られた話ではない．Kepler 運動を例にとろう．惑星の近日点が不動であるのは，Newton 型の中心力に特有の「隠れた」対称性があり，Runge–Lenz ベクトルという余分な保存量が存在するからである．Carter 定数もある種の隠れた対称性と関連した保存量であり，

*3) 粒子にスピン（自転）を与えると軌道は非可積分になり，カオス性を示す[2]．

$$\nabla_{(a}K_{bc)} = 0 \tag{2}$$

を満足する **Killing テンソル** $K_{ab}(=K_{(ab)})$ を用いて，

$$K = K^{ab}p_a p_b \tag{3}$$

と表されることが知られている[3]．Kerr 時空の K_{ab} の具体的表記は割愛するが，要するに Killing テンソル (2) は Killing ベクトルのテンソル版と思ってもらえればよい．(3) 式のように Killing テンソルで表せる量は，測地線に沿って保存される $[p^a\nabla_a K = (\nabla_{(a}K_{bc)})p^a p^b p^c = 0]$．計量テンソル g_{ab} や任意の 2 つの Killing ベクトルの組合せ $\xi^{(1)}_{(a}\xi^{(2)}_{b)}$ などは自明な Killing テンソルとなるが，Carter 定数の生成子である Killing テンソルはこのような組合せでは表せない既約な量である．(E, L_z) が Killing ベクトル $(\xi^a_{(t)}, \xi^a_{(\phi)})$ から作られる運動量 p_a の 1 次の量であるのに対して，(H, K) は Killing テンソル (g^{ab}, K^{ab}) から作られる運動量の 2 次の保存量に対応している．

粒子の測地線と同様にして，Kerr 時空における Klein–Gordon 方程式 $(\nabla^a\nabla_a - \mu^2)\Phi = 0$ も完全可積分である．μ はスカラー場の質量を表す．これは 4 つの量子力学的演算子 $\hat{E} = i\xi^a_{(t)}\nabla_a$，$\hat{L} = -i\xi^a_{(\phi)}\nabla_a$，$\hat{H} = \nabla_a g^{ab}\nabla_b - \mu^2$，および $\hat{K} = \nabla_a K^{ab}\nabla_b$ が一次独立で互いに可換であることに由来し[4]，このとき $\hat{K}$ は r, θ 方向の変数分離定数の生成子となっている．

Kerr 時空における Killing テンソルは，さらに

$$\nabla_{(a}f_{b)c} = 0$$

を満たす **Killing–Yano テンソル** $f_{ab} = f_{[ab]}$ を用いて $K_{ab} = f_a{}^c f_{bc}$ と表すことができる．角括弧は添え字の反対称化を表す．Killing–Yano テンソルの自乗は自動的に Killing テンソルとなるが，Killing テンソルが必ずしも Killing–Yano テンソルで表されるとは限らない．ここで Dirac 方程式 $(\gamma^a\nabla_a + m)\psi = 0$ が Klein–Gordon 方程式の「平方根」であったことを思い出すと，Killing テンソルの「平方根」である Killing–Yano テンソルによって，Kerr 時空における Dirac 方程式も可積分で変数分離可能になることが理解できる[5]．

Kerr ブラックホールと隠れた対称性との関連は，もっと広い視点で時空曲率の対称性として捉えることができる．Petrov の Weyl テンソルの分類によると，Kerr 解は D 型と呼ばれる非常に対称性の高いクラスに分類される．現在まで知られている定常ブラックホール解はすべて Petrov D 型に属する．D 型の真空解では C-計量と呼ばれる特殊なクラスを除いて，一般に Killing–Yano テンソルが存在することが示されていて，第 4 の保存量を与える[3,5]．

また Kerr 時空では，線形摂動 h_{ab} $(g_{ab} = g^{(0)}_{ab} + h_{ab})$ の満たす摂動方程式は，Teukousky によって変数分離可能となることが示されており，安定性解析や重力波の評価などの際に重要な役割を果たしている．しかし，このとき現れる変数分離定数（積分）がどのような（隠れた）対称性の帰結であるか，まだよくわかっていない．

3. 軸対称定常時空と Ernst 方程式

次に，Einstein 方程式自身が示す可積分性について見ていこう．ここでは物理的にも興味深い，軸対称定常な Einstein 方程式の真空解 $(R_{ab} = 0)$ に着目する．軸対称定常時空には 2 つの Killing ベクトル $\xi^a_{(t)}, \xi^a_{(\phi)}$ が存在し，さらにそれらは互いに可換 $[\xi_{(t)}, \xi_{(\phi)}] = 0$ である．このような高い対称性を持つ場合には計量の形は強く制限され，循環型と呼ばれるブロック対角型

$$\mathrm{d}s^2 = \hat{g}_{\mu\nu}(\rho, z)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + e^{2\nu(\rho,z)}(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2)$$

で表すことができる[6]．$x^\mu = \{t, \phi\}$ は 2 つの Killing 座標を表す．(ρ, z) は $\xi^a_{(\mu)}$ に垂直な部分多様体 M^2 上の座標であり，座標変換の自由度を用いて共形平坦にとった．

次に Einstein 方程式の一部 $R^t{}_t + R^\phi{}_\phi = 0$ を書き下すと，$W := \sqrt{-\mathrm{det}g_{\mu\nu}}$ が M^2 上の調和関数 $(\partial^2_\rho + \partial^2_z)W = 0$ であることがわかる．ここで共形変換の自由度 $\zeta := \rho + iz \to F(\zeta)$ (F は解

析関数）が存在することに注意すると，（W が定数でなければ）$W=\rho$ と選ぶことができる．よって $f=-\xi_{(t)a}\xi^a_{(t)}$, $A=f^{-1}\xi_{(t)a}\xi^a_{(\phi)}$, $e^{2\gamma}=fe^{2\nu}$ と置くと，計量は Weyl–Papapetrou 形式

$$\mathrm{d}s^2=-f(\mathrm{d}t-A\mathrm{d}\phi)^2+f^{-1}\left[\rho^2\mathrm{d}\phi^2+e^{2\gamma}(\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)\right], \quad (4)$$

に帰着できる[*4)]．

では (4) の計量で Einstein 方程式 $R_{ab}=0$ を具体的に書き下そう．この際 M^2 上の座標 (ρ,z) を，仮想的な 3 次元 Euclid 空間の円筒座標 $\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\phi^2+\mathrm{d}z^2$ と見なすと便利である．この Euclid 空間の微分演算を $\vec{\nabla}$ とすると，$R_{tt}=0$ と $R_{t\phi}=0$ より $\vec{\nabla}\cdot(\rho^{-2}f^2\vec{\nabla}A)=0$ が得られる．よって，

$$\partial_\rho\psi=\rho^{-1}f^2\partial_zA,\quad \partial_z\psi=-\rho^{-1}f^2\partial_\rho A$$

を満たすツイストポテンシャル $\psi=\psi(\rho,z)$ が存在する．ここで **Ernst ポテンシャル**

$$\mathcal{E}:=f+i\psi$$

を導入すると，$R_{tt}=0$ は **Ernst 方程式**

$$(\mathrm{Re}\mathcal{E})\vec{\nabla}^2\mathcal{E}=(\vec{\nabla}\mathcal{E})^2 \quad (5)$$

に帰着する．残りの Einstein 方程式（$R_{\rho\rho}-R_{zz}=0$ と $R_{\rho z}=0$）は

$$\partial_\zeta\gamma=\frac{1}{2}\rho f^{-2}(\partial_\zeta\mathcal{E})(\partial_\zeta\bar{\mathcal{E}})$$

となるので，γ は求積法により求めることができる[*5)]．つまり Ernst 方程式さえ解ければ，計量のすべての成分が順次得られる．Einstein 方程式が 10 個の連立 2 階非線形偏微分方程式であることを思い出すと，一本の複素微分方程式 (5) まで帰着できたことは驚きに値する．

時空が静的（$\psi=\mathrm{Im}(\mathcal{E})=0$）であるときはさらなる簡単化が可能で，Ernst 方程式は Laplace 方程式 $\vec{\nabla}^2U=0$ に帰着され，完全に線形化されることがわかる．ここで $U:=\frac{1}{2}\ln f$ とおいた．この解のクラスは **Weyl 解**と呼ばれ，U は軸上に分布した重力源から作られる Newton ポテンシャルと一対一に対応する．例えば，z 軸上の $(-\sigma,\sigma)$ の範囲に線密度 1/2 の重力源を置いたときの解は，$R_\pm=\sqrt{\rho^2+(z\pm\sigma)^2}$ として

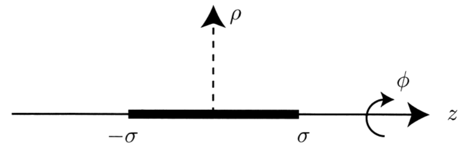


図 1　仮想 3 次元 Euclid 空間における Schwarzschild 解に対応する重力源の分布．

$$U=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{R_++R_--2\sigma}{R_++R_-+2\sigma}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad (6)$$

となる（図 1）．ここで

$$\rho=\sigma\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)},\quad z=\sigma xy \quad (7)$$

で定義される扁平楕円体座標 (x,y) を用いた．いま $\sigma=M$ として，$\rho=\sqrt{r(r-2M)}\sin\theta$, $z=(r-M)\cos\theta$ と座標変換をすると，(6) で与えられる時空は，Kerr 解で $a=0$ とした Schwarzschild 解であることがわかる．仮想 Euclid 空間の重力源のある部分（$\rho=0, |z|\le\sigma$）は，事象の地平線に対応する．また Weyl 解は Laplace 方程式に従うので，解の重ね合わせができる．Schwarzschild 解を z 軸上に並べた解は，図 1 のような重力源を順次加えれば得られる．

一方，静的でない場合は，非線形方程式 (5) を一般的に解く手法は知られていない．例えば Kerr 解 (1) を Ernst 形式に書き換えると，

$$\Xi=M^{-1}(\sigma x+iay),\quad \Xi:=\frac{1+\mathcal{E}}{1-\mathcal{E}},$$

および $\sigma=\sqrt{M^2-a^2}$, $\rho=\sqrt{\Delta}\sin\theta$, $z=(r-M)\cos\theta$ であることが確かめられるが，実際に非線形方程式 (5) を睨んで上式が解であることを見抜くのは難しいであろう．Ernst 方程式が提唱された後も，Kerr 解以外にしばらく新しい解が

*4)　これを導くのに真空の Einstein 方程式を用いていることに注意しよう．宇宙項が存在する場合（$R_{ab}=\Lambda g_{ab}$），循環型であっても (4) のように表すことはできない．

*5)　この式の可積分条件は Ernst 方程式が保障する．

見つからなかったのも無理はない．

このような現状にあって，**Tomimatsu–Sato 解**の発見はErnst 方程式の解の導出法に関する研究を推進するきっかけとなった．1970 年代には様々な線形散乱問題を適応してErnst 方程式が完全可積分であることが示され，ソリトンとブラックホールの興味深い類似性が明らかになった[7]．その中でも，Harrison，およびNeugebauer によって，Ernst 方程式に既知の解から様々な解を生成するアルゴリズムである**Bäcklund 変換**が見出されたことは特筆すべき点である．さらにBelinski とZakharov は，Ernst 方程式をLax 形式に書き換えることに成功し，**逆散乱法**による解の構築法を定式化した[9]．例えばKerr 解はMinkowski 時空に2 ソリトン変換を施すことで得ることができる．このような視点からの研究が発展し，Tomimatsu–Sato 解のパラメータにソリトン的意味付けを与えるなど，新たな認識をもたらすこととなった．Ernst 方程式は楕円型方程式であるから「ソリトン」という言葉はいささか不適切であるが，ソリトン的解析手法の有用性を示す興味深い例である．

その具体例として，ここでは解の変換群の観点から，新たな解の構成法を探ってみよう[*6]．まず，Ernst 方程式 (5) がラグランジアン

$$\begin{aligned} L &= \rho f^{-2}\left[(\vec{\nabla} f)^2 + (\vec{\nabla}\psi)^2\right] \\ &= \rho \mathcal{G}_{AB}(\Phi)(\vec{\nabla}\Phi^A)\cdot(\vec{\nabla}\Phi^B) \end{aligned} \tag{8}$$

からの変分問題として導けることに注意しよう．ここで $\Phi^1 := f, \Phi^2 := \psi$ とした．また，

$$\mathcal{G}_{AB}(\Phi)\mathrm{d}\Phi^A\mathrm{d}\Phi^B := \frac{(\mathrm{d}\Phi^1)^2 + (\mathrm{d}\Phi^2)^2}{(\Phi^1)^2} \tag{9}$$

はスカラー場 Φ^A が値をとる標的空間（target space）の計量を表す．今の場合，標的空間は2 次元双曲面である．(8) は3 次元Euclid 空間を基底空間（base space），2 次元双曲面を標的空間とする**非線形シグマ模型**のラグランジアンであり，完全可積分であることが知られている[10]．(8) から導かれる運動方程式，つまりErnst 方程式は，

$$\vec{\nabla}^2\Phi^A + {}^{\mathcal{G}}\Gamma^A_{BC}\vec{\nabla}\Phi^B\cdot\vec{\nabla}\Phi^C = 0, \tag{10}$$

となる．${}^{\mathcal{G}}\Gamma^A_{BC}$ は標的空間におけるアフィン接続である．このスカラー場 $\Phi^A(\rho, z)$ のことを，基底空間から標的空間への調和写像と言う[6]．

ここで Φ^A をErnst 方程式の既知の解としよう．もし標的空間にKilling ベクトル ξ^A が存在すれば，計量 $\mathcal{G}_{AB}(\Phi)$ は ξ^A に沿って不変であり，(8) から導かれる運動方程式 (10) も不変となる．つまり無限小変換（$\epsilon \ll 1$ とする）を受けた場

$$\Phi'^A = \Phi^A + \epsilon\xi^A,$$

も運動方程式 (10) を満足し，Ernst 方程式の新しい解となる．いま，標的空間 (9) には $SO(2,1) \simeq SU(1,1)$ の対称性があり，その生成子に対応した3 つのKilling ベクトル

$$\xi^A_{(1)} = f(\partial_f)^A + \psi(\partial_\psi)^A, \tag{11a}$$

$$\xi^A_{(2)} = (\partial_\psi)^A, \tag{11b}$$

$$\xi^A_{(3)} = f\psi(\partial_f)^A - \tfrac{1}{2}(f^2 - \psi^2)(\partial_\psi)^A \tag{11c}$$

が存在し，$sl(2,\mathbb{R})$ 代数（$[\xi_{(1)}, \xi_{(2)}] = -\xi_{(2)}$，$[\xi_{(2)}, \xi_{(3)}] = \xi_{(1)}$，$[\xi_{(1)}, \xi_{(3)}] = \xi_{(3)}$）を満足することがわかる．これらに対応する有限変換は，$\mathrm{d}\Phi^A/\mathrm{d}\epsilon = \xi^A$ を積分することで

$$\mathcal{E}' = a\mathcal{E}, \tag{12a}$$

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + ib, \tag{12b}$$

$$\mathcal{E}' = (1 - ic\mathcal{E})^{-1}\mathcal{E} \tag{12c}$$

となる．ここで a, b, c は実定数である．変換 (12a) は自明なスケーリングを表し，(12b) はツイストポテンシャル ψ の定義に吸収することができるので，得られた解は元の解と変わらない．(12c) のみが非自明な変換で，**Ehlers 変換**と呼ばれている．これにより回転のないWeyl 解（$\mathrm{Im}(\mathcal{E}) = 0$）から回転を持つ解（$\mathrm{Im}(\mathcal{E}') \neq 0$）が得られる．

例としてSchwarzschild 解 (6) を「種」にとってみよう．(12a) のスケーリングの自由度を用いると，(6) からEhlers 変換により得られるErnst

*6) 逆散乱法などの解説は他でも詳しく解説されており[7,8]，また多くの紙面を要するので省略する．

ポテンシャルは，扁平楕円体座標 (7) で表すと

$$\mathcal{E}' = \frac{x^2 - 1 + ic(x-1)^2}{x^2 + 1 + 2(c^2-1)(c^2+1)^{-1}x}$$

となる．ここで $c^2 = (\sigma - M)(\sigma + M)^{-1}$, $\sigma = \sqrt{M^2 + n^2}$ と置いて，$\sigma x = r - M$, $y = \cos\theta$ と座標変換すれば，**Taub–NUT 解**

$$\mathrm{d}s^2 = -f(\mathrm{d}t + 2n\cos\theta\mathrm{d}\phi)^2 + f^{-1}\mathrm{d}r^2 + (r^2+n^2)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2),$$

$$f = \frac{r^2 - 2Mr - n^2}{r^2 + n^2}$$

が得られる．Ernst 方程式を直接解くことなしに，代数的な手法で新たな解を構築できるのが大きな利点である．

しかし，この例からわかるように，Ehlers 変換では種が漸近的に平坦であっても，得られた解が再び漸近的平坦となるとは限らない．Taub–NUT 解のように時間的閉曲線が存在するなど，非物理的な解となる場合もある．また Minkowski 計量を種にしても新しい解は得られない．Minkowski 時空から物理的に興味のある新しい解を得るには，多重極モーメントを生成する HKX 変換[11]や，逆散乱法などの手法を用いることが必要となる．

4. まとめと展望

重力理論の発展において，可積分性は重要な役割を担ってきた．Ernst 形式を用いて導かれるブラックホールの唯一性定理は，一般相対論における金字塔ともいうべき美しくも強力な定理である．我々が宇宙に実在するブラックホールを解析する際，Kerr 時空に焦点を絞ることができるのも，もとを辿れば可積分性の恩恵なのである．

最後に統一理論的視点から注目されている高次元時空への応用について述べよう．高次元では地平線が球面状の回転ブラックホール（Myers–Perry 解）が以前から知られていたが，2002 年には地平線がリング状のブラックリング解が発見され[12]，ブラックホールの一意性に慣れ親しんでいた我々に大きな衝撃を与えた．このことに動機づけられ，新たなブラック「ホール」解の探求が精力的に行われた．漸近的平坦な 5 次元時空では，逆散乱法を適用することにより[*7]，単純な Weyl 解からブラックリングやブラックサターン等の多種多様な解を得ることに成功している[13]．

しかしこれらの解は対称性が低く，定量的な性質はほとんど明らかになっていない．Killing–Yano テンソルが存在する Myers–Perry 解でさえ，安定性などの基礎的な問題に対しては未だ解析法が確立していないのが現状である．高次元重力は多くの謎で満ちあふれており，我々は今後も様々な難題に直面するであろう．そのときも従来のように可積分性が指針となって，大きな発展に繋がるだろうか？ そのことを期待して筆を置くとしよう．

*7) 定常な d 次元時空を $O^{d-2} \times M^2$ のような循環型計量で表すには，軸まわりの可換な Killing ベクトルが $(d-3)$ 個必要となる．しかし $d \geq 6$ の漸近的平坦時空にはこのような Killing ベクトルは $(d-3)$ 個も存在しないので，この手法は適用できない．

参考文献

1) B. Carter, *Phys. Rev.* **174**, 1559 (1968).
2) S. Suzuki and K. Maeda, *Phys. Rev. D* **61**, 024005 (2000).
3) 隠れた対称性については V.P. Frolov and D. Kubiznak, *Class. Quant. Grav.* **25**, 154005 (2008).
4) B. Carter, *Phys. Rev. D.* **77**, 3395 (1977).
5) Kerr 時空における測地線と摂動方程式の解説は S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford Univ. Press (1983).
6) H. Stephani *et al*, *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge Univ. Press (2003).
7) 別冊・数理科学「ソリトン」(1985).
8) 前田恵一，『重力理論講義：相対性理論と時空物理学の進展』(SGC-63，サイエンス社，2008).
9) V. Belinski and E. Verdaguer, *Gravitational solitons*, Cambridge Univ. Press (2001).
10) J. Polchinski, *String theory*, Vol I, Cambridge Univ. Press. (1998).
11) C. Hoenselaers, W. Kinnersley and B.C. Xanthopoulos, *J. Math. Phys.* **20**, 2530 (1979).
12) 高次元ブラックホールについては R. Emparan and H.S. Reall, *Living Rev. Rel.* **11**, 6 (2008).
13) H. Iguchi and T. Mishima, *Phys. Rev. D* **73**, 121501 (2006); S. Tomizawa and M. Nozawa, *Phys. Rev. D* **73**, 124034 (2006); H. Elvang and P. Figueras, *JHEP* **0705**, 050 (2007).

（のざわ・まさと，早稲田大学理工学術院）
（まえだ・けいいち，早稲田大学理工学術院）

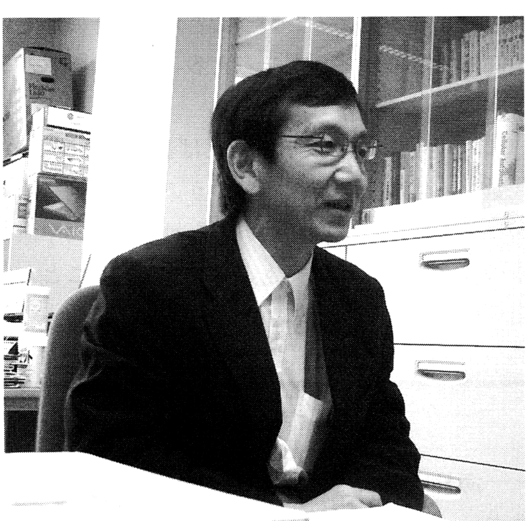
可積分系の面白さ

時弘 哲治（聞き手：編集部）

1. 可積分系の魅力や面白さ

――今回の特集を見ると，可積分系は数学や物理学はもちろんのこと，渋滞学など身近な問題にも応用されていることが窺えますが，可積分系の魅力や面白さはどういったところにあるのでしょうか.

佐藤幹夫先生がおっしゃった言葉に「解は見えなければならない」というものがあるのですが，可積分系の一番の特徴というのはまさにこの“解が見える”システムであると思います．また，これは神保道夫先生の言葉なのですが，「量子可積分系とは，量子系の中の特殊関数論をやっているのだ」というものがあります．特殊関数というのは関数の中でも特別に性質のよいもので，いろいろな構造をもっていて，具体的に書き下せて，豊かな内容をもつ関数たちなんですが，そう考えると，可積分系の一番面白いところは，“解が見える”，“具体的に扱える”，したがって“現実の問題に応用できる”ということだと思います．具体的に扱えるとか，例えばワイル群ならワイル群といった何かの構造の表現をきちんと与えられる，というようなことの一つの帰結として，いろいろな応用の可能性があるのだと思います.



時弘哲治氏.

これまでの可積分系を見ると，ソリトンの再発見が 1965 年頃で，1980 年頃に佐藤理論が出て，それで大体ソリトン理論は終わったかなと思っていたら，そのあと量子群の発展がドリンフェルドと神保によってなされ，1990 年頃に一段落したかなと思うと，今度は離散可積分系が数式アルゴリズム等との関係でクローズアップされて，一方で佐藤理論そのものも 1980 年代後半から弦理論への応用という形でずっと発展していき，また一段落したかなと思うと 2000 年頃になって，トロピカル幾何学との関係が超離散系であるセルオートマトンと結びついて，新たに可積分系が注目されてきました.

このように，終わったと思ったら新しい発見が

続いて，なかなか終わりになりそうもない，といったところも面白いのではないかと思います．

2. 日本人の活躍

――今お話を伺っていて，日本人の方が非常に活躍されていると思いましたが，日本での研究状況などをお聞かせいただけますでしょうか．

伝統的にみると，1965年のソリトンの再発見は，アメリカのクルスカルたちのグループやピーター・ラックスらによっていろいろな研究がされているのですが，やはり日本人では，1960年代の後半に戸田盛和先生が戸田格子を発見されて，1970年代から現在に至るまでは広田良吾先生が双線形化法という形でソリトンを牽引されてきて，1980年にはある意味のソリトンの統一理論である佐藤理論が佐藤幹夫先生によって創られました．そういったことでは，可積分系は本当に日本人がリードしてきたと言っても過言ではないと思います．

今話したのは古典可積分系ですが，量子可積分系で言えば，オーストラリアのバクスターやロシアのグループも精力的に研究してきています．日本でも和達三樹先生たちがずっとやって来られていますが，京都の佐藤スクールにいらっしゃった神保先生が量子群を発見されていますから，やはり量子可積分系でもずっと日本がリードしてきていると思いますね．

これは極端な例かもしれませんが，今年のニュートン・インスティチュートの離散可積分系に関する半年がかりのプログラムの中で，それのサテライトのミーティングとして，離散および超離散可積分系ワークショップがイギリスのグラスゴー大学であったのですが，そのとき全部で23名の講演者のうち日本人の発表者が13名いるんですね．ですから，こういう分野にかけてやはり日本は強いと思います．

毎年夏に京都大学の数理解析研究所で可積分系のワークショップを開いているのですが，そのときに割と国内外から人が集まって，そこでも最近はとくに新しい人が多く，若い人たちが増えてきたなあと思いますね．とくに私が知る限りでは，日本人はむしろ増えているのではないかと思います．

また，もう一つ大きいのではないかと思うのは，可積分系というのは数学の一分野というだけでなく，例えば西成活裕先生の渋滞学への応用からもわかるように，工学や物理学にも広がっていますので，いろいろな意味で交流があって盛んに研究が進んでいる分野だと思います．

3. “解が見える”ということの利点

――こうした広がりの多さは，やはり“解が見える”ということが大きいのでしょうか．

そうですね．大きいと思いますね．実際に，ソリトンが衝突しても形が変わらないといった現象を見ると，なるほどと思いますよね．それと似たような現象で言うと，新体操のリボン競技に出てくるリボンの輪っかが動いていく現象は，ループ・ソリトンと同じであることがわかっていたり，プリンタで紙がカラー印刷されていくときのインクジェットの動きも，シミュレートすると戸田方程式になることもわかっているんですね．だから，具体的に解が見えるということから，その形を見て応用できるかどうかを考えることができるわけですね．

こういうことは数学で言えば表現論ですよね．代数なら代数を表現するということで行列になるわけですが，こういう抽象的な対象が行列や演算子のような形で表現できてしまうということが面白いのではないかと思います．

4. 海外の状況

――海外の状況をお聞かせいただけますでしょうか．

オーストラリアには離散系のマッピングの研究

をしているクィスペルというオランダ人の方がいますし，イギリスやロシアにもかなりの人数がいて，総体として海外は応用関係が多いような気がします．アメリカも若い人たちが研究をしていますが，日本ほど多くはないという印象が私にはありますね．とくに応用といっても，可積分系に特化してやるだけでなく他分野も扱うというように，割と広い立場から研究されているような印象があります．

5. 可積分系を学ぶポイント

――可積分系を学習する上でのポイントがありましたら，お教えいただけますでしょうか．

これは非常に難しいですね．可積分系の基礎はこれだ，とはっきりと言えるものがなかなか特定できないのです．数学は積み上げの学問ですから，最先端までの道のりはある程度は決まっていますが，可積分系というのはそういったところが少ないですよね．数学の基礎的な知識があればいいですが，学んだほうがよいものとしては量子代数，古典的なことに興味があるならば佐藤理論，といったものが挙がります．そこから先は教科書といったものがそうあるわけではありませんから，自分で見つけるしかない状況だと思います．

私は応用数学なので，とにかくまず自分で面白そうだと思う問題を見つけて，それを数学の言葉で表現する習慣をつけてほしいなと思います．何かの研究をしたいときに，それを数学的に定式化するとどうなるかを考えることが大事ですね．例えば，渋滞という現象がそうですね．渋滞という現象が何かということを数学的な言葉で表現してみて，数学的なモデルを立ててみる．するとセルオートマトンでモデル化してみたら，厳密に解けるものがあった．確率プロセスとして定式化してみたら，ASEP（asymmetric exclusion process）という厳密な確率モデルとして作ることができた．というように，一番大事なのは，このことを研究したいという気持ちが最初にあって，それを数学の言葉で表現するということだと私は思います．

今の話は応用サイドの話ですが，純粋に可積分系を研究したいという人は，表現論などを勉強してその上で未解決問題に挑戦してみる，という道もあります．自分が数学として非常に面白いと思うものを勉強して，それを例えば可積分系の対象として捉え直すと新しい発見もあるのではないかと思います．実際そういう形で参入している人たちもいます．

こういったことは，一つのことだけというよりも，広く興味をもっていれば，自然にその興味の方向には可積分系があるので，自分の可積分系がわかってくるということに繋がるのではないでしょうか．

6. 影響を受けたこと

――先生が研究者になるにあたって影響を受けたことをお聞かせいただけますでしょうか．

私は山口県出身なのですが，父親は名古屋の企業に勤めた後，山口に戻って高校の数学の教師をし，その後に日立に勤めてから，最終的に山口大学で教職についたという経歴を持っています．その父親が，大学の教員が一番自由で本当に自分の好きなことができた，と言うんですね．それで，「お前のような性格の者は企業にはたぶん向いてないから，大学関係に就職したほうがいい」と．この道に入る上で（は，この言葉に）一番影響を受けたのではないかと思っています．

可積分系に関して言えば，私は工学部出身なのですが，薩摩順吉先生の下で佐藤理論などを勉強しているうちに面白いと思って進んだのがきっかけです．助手のときにペンシルベニア大学の物理学科に1年間だけ留学し，ルベンスキー先生のところで勉強しました．ノーベル賞を受賞したドゥジャンヌのお弟子さんにあたり，液晶や統計力学関係を専門にされている方です．その先生は，質

問したときに，必ず一番根本にある仮定や仮説，例えば物理ならハミルトニアンなどを書くところから始まって，黒板に細かい計算を全部示して最終的な結果まで説明する，というやり方をする人だったんです．モデルを書くところまでが物理学で，そこから先は数学なのだから結果は絶対間違わない，現実に合わなければ出発点が間違っているのだと，そういう立場の人でした．私は，物理というものは非常に曖昧なものだという印象があったのですが，彼の影響も強くあって，より数理的な研究をやってみたいと思うようになりました．

7. メッセージ

――これから研究者を目指す方や学生さんにメッセージがありましたらお願い致します．

そうですね．ゆとり教育が盛んになったときだったと思いますが，どなたかが「私は生まれてこのかた2次方程式の解法を使ったことがないので，一般の人には必要ないのではないか」というようなことをおっしゃっていたそうですが，それは現実を考えればウソであって，2次方程式をちゃんと解ける人がいてその人たちがいたからロケットが空を飛んでいるわけです．100人のうち1人が使うとか，1万人のうち1人が使うというのは非常に重要なことで，実生活に数学が役に立っている，ということをきちんと認識しておいてもらいたいと本当に思います．

もちろん，数学が人類の文化として重要であることは言うまでもありませんが，役に立つという面を考えると，よく言われるように100年，200年後に役に立つということはあるでしょうけれど，私はもっと積極的に，その役に立つスパンを50年短くする，10年短くする，というようなことに興味をもつ人が増えてもいいのではないかなと思っています．

私には1編だけ Nature 誌に掲載された共著論文があるのですが，それは固体中にある水素原子に似た電子と正孔の対を数学のモデルで表現すると，ある場合には量子可積分系のハミルトニアンで書け，その結果固体中に水素原子がたくさん繋がったような状態ができることが示されて，それが実験で観測されたというものです．水素分子は存在しますが，3個以上の水素原子の繋がった状態というのは常識的には考えにくく，数学的にモデル化して初めてわかったものです．

そういった経験から考えると，先にも話しましたが，“数学の言葉で表現する”ということがとても大事で，それが実生活に役に立つと思う人が増えてもらえると嬉しいなと私は思います．

もう一つは，これも一般的なことかもしれませんが，研究する上で一番大事な才能は何かというと，「努力ができる」という才能だと思います．私の周りで偉大な仕事をされた方を見ていて思うのですが，なぜここまで努力できるのだろうと思えるくらい努力をされています．努力できる事柄というのは，持って生まれた能力もあると思いますが，自分で磨けばそれなりにできるようになっていくのではないかと思います．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

(2009年4月，東京大学駒場キャンパス研究室にて)

（ときひろ・てつじ，東京大学大学院数理科学研究科）

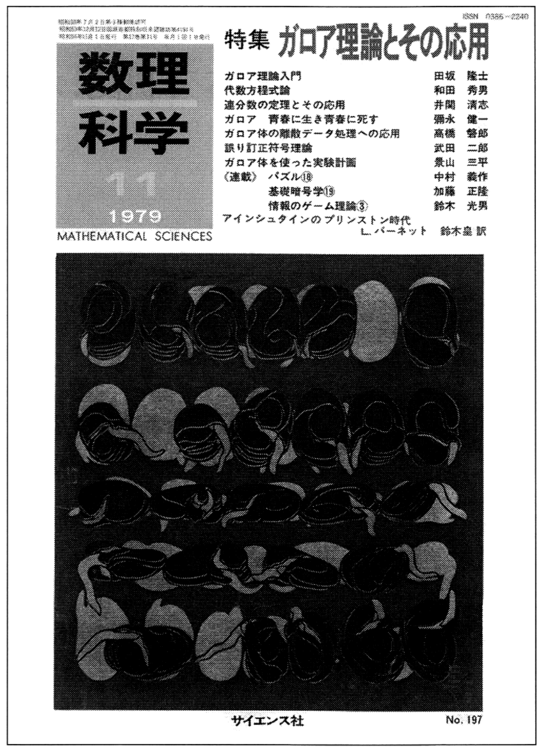
「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

彌永 健一

1979年11月号

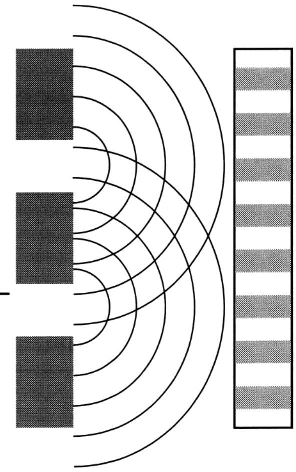
中学生の頃だったか，父（彌永昌吉）の本棚にあったインフェルトの『ガロアの生涯　神々の愛でし人』（市井三郎訳，日本評論社）を見て，表紙にあったガロアの愁いを帯びた表情に惹かれて読みふけった．1979年11月号のガロア理論とその応用についての特集にガロアについて書かないかと依頼されたとき，彼についてはよく知っているような気がして気安く引き受けた．ところが，手元にあったデュピュイの『ガロア　その真実の生涯』（辻雄一訳，東京図書）や，大学の図書室にあったガロア全集（OEuvres de Galois 1976）などを改めて見て愕然とした．ガロアについての基本的なデータの数々が，それぞれ食い違っていたのである．インフェルトの本にある印象深いエピソードの数々の中にも，事実とは異なるらしいものがあることにも気づいた．締切までの時間に史実についての確認をすることもできないまま悩んでいたが，その一方，全集にあるガロアによる数学の進歩についての文章や，彼がサント・ペラジーの刑務所で書いた論文の序文などを読み，強い共感を抱いた．当時，成田空港に反対する運動は青年たちの心を躍らせ，金や権力で住民たちを踏みつけていた者たちに対する憤りの気持は私の中にも渦巻いていたのである．1830年，フランス7月革命の最中で命がけで戦い，その中で数学に熱中していたガロアの文章にある，権威に対する不信と怒り，数学のダイナミズムについての情熱は，私自身の心にあったものと深く響き合う内容だった．今ではすっかり整理され，代数学を学ぶ者にとっては必修であるガロア理論も，未整理な部分を含みながらも，空をわたる雲のような広がりを持つ体の世界と，結晶のように澄明な群という，極めて異なったものどうしが作用し合う舞台装置として考えられていたのである．



30年前の文章について，今振り返るために，父による『ガロアの時代　ガロアの数学 第1部，第2部』（シュプリンガー・ジャパン）と山下純一氏による『ガロアへのレクイエム』（現代数学社）に目を通して，私の文章には伝説を定説として受け取っていた部分もいくつかあったことに気づいた．また，ガロアのヴィジョンには，後にリーマン面論として知られる壮大な理論の萌芽が，「多義性の理論」として含まれていたらしいことが，上にあげた全集の前身といえる1897年に出されたガロアの遺稿集の序文の中でピカールによって指摘されていることも知った．再来年（2011年）にはガロアが生まれてから200年になる．ガロアが抱いていたヴィジョンについても改めて評価し，それを時代と数学の流れの中に位置づけるような作業が望まれる．

（いやなが・けんいち，東京海洋大学名誉教授）

目で見て学ぶ量子力学



第14回 実験でひもとく量子の不思議

超伝導体で囲まれた磁束は量子化する！

外 村　彰

14.1 はじめに

電子は磁場と相互作用する．磁場を通過した電子波の位相の等高線を観察すると，それが定量的な磁力線になる．今回は，この方法を使って，“磁場と超伝導体の相互作用” を考えてみよう．超伝導に関しては，既に第 9 回で “マイスナー効果” と “磁束量子化” に触れた．「磁場を排除したり，磁束量子化したりする超伝導体とは，一体何者なのだろう？ 何故こんなことが起こるのだろう？」──そんな疑問も，当然のことである．1911 年に発見された超伝導は，以来，50 年もの長きにわたって謎につつまれ，ノーベル賞学者を含む優れた理論家たちの挑戦を退けてきた．このため，超伝導に磁場をかけたときの不思議な振舞いを “理解” するのは，簡単でないが，続く 15 回，16 回で，それにも挑戦してみたい．

14.2 超伝導とは

超伝導は 1957 年，J. バーディーン，L.N. クーパー，J.R. シュリーファーによって解明された．イニシャルをとって BCS 理論と呼ばれている．この理論によれば，超伝導体の内部で，電子が 2 つずつくっつき合ってペアを組む．“クーパー・ペア” である．2 つの電子は，電気的に反撥し合うが，格子振動（フォノン）の媒介によって引力が生じて対を組む．

よく使われる例（たと）えは，マットにのせたボールである．マットが凹むと，近くのボールが引き寄せられ，引力が働いたように見える．“マイナスの電荷をもった電子” がボール，“格子を組むプラスのイオン” がマットである．電子は周りのイオンを引きつけて，イオンの格子を歪ませる．それまでは，電子とイオンで電気的には中和していたものが，イオンが電子に近づくと，プラスの電気が

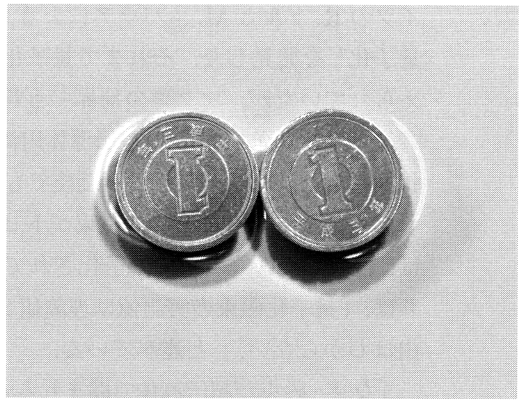


図 14.1　水面に浮かぶ一円玉．水面が凹んで一円玉を支えている様子が見える．2 つの一円玉が近づくと，スーと引き寄せられて，くっついてしまう．すぐに一円玉が沈んでしまうので，よほど注意深くやらないと，引き離すことはできない．電子がイオン格子を歪ませてクーパー・ペアを作るのも，似た原理である．ただ一円玉なら，何個でもくっつくが，電子の場合，そうはいかない．

余分に生じて，別の電子を引き寄せる．

水面に浮かせた 2 つの一円玉がくっつき合う例を図 14.1 に示す．これがクーパー・ペアと思えばよい．写真をよく見ると水面が一円玉の端で凹んでいる．一円玉は，表面張力で浮いている．このため，2 つがある距離以内に近づくと急に引きつけ合って，容易には離れない．

電子は “フェルミ粒子” であるが，クーパー・ペアは，“ボース粒子”[傍注1] になる．パウリの禁止則から解放されて，たくさんのクーパー・ペアは同じ状態に凝縮することができる．電子波の場合には，別々の電子波の位相は，揃っていないが，クーパー・ペアの波は，すべてが同じ位相になって，“1 つの巨視的な波” を作る．これがボース粒子の特長である．この状態は安定なので，多少のことでは常伝導状態には戻らない．光子はボース粒子なので，たくさんの光子が同じ状態になって巨視的な波を作ることができる．

電荷を持ったクーパー・ペアの波は，超伝導体のすみずみまでコヒーレントな波を形作り，まさに “巨大化した原子” である．電流が流れても抵抗は生じない．磁場がかかると，それに反応して，様々な不思議な現象を起こす．あまり強い磁場でなければ，波のコヒーレンスを維持するために，超伝導体内部から排除される．超伝導体を貫いた場合，磁束は，$\frac{h}{2e}$ 単位で量子化される．

まずは，AB 効果の検証実験で用いられた “磁束量子化” の話から始めよう．

［傍注 1］　ボース “粒子” と言うと，如何にも，“2 つの原子がくっついた分子” のようなものを想像するが，ペアーを組む 2 つの電子は，数百 Å から数千 Å も離れている．電子の平均間隔は数 Å なので，どんな相手でも良ければ，ずっと近くにたくさんいる．「電子は何故こんなに遠くにいる電子をペアーの相手に選ぶのだろうか？」電荷の効果だけでペアーの相手が選ばれるような説明をしたが，そうではない．電子は，電荷以外に，“速度” や “スピン” で特徴づけられる．常伝導状態の金属の中では，指定席が準備されている．フェルミ粒子である電子はその状態に 1 個ずつしか入れないので，すべての電子が別々の状態に入っている．引力が働いてクーパー・ペアになれるのは，“速度” も “スピン” もちょうど逆向きの状態にある 2 つの電子である．しかも，一番エネルギーの大きな電子（フェルミ・エネルギーに近いエネルギーを持つ電子）だけがクーパー・ペアになって超伝導を担うためである．

14.3 磁束量子化の発見

超伝導円筒の中を通る磁束が量子化する現象が見出されたのは，超伝導のメカニズムが解明されて間もない 1961 年のことである．フィジカル・レビュー・レターズの 7 月 15 日号に，歴史に残る論文が 4 つ並んで掲載された[1)]．うち 2 つは，実験の論文で，アメリカの B.S. ディーバー，W. フェアーバンクと西ド

イツのR. ドルとM. ネバウアによる．これら2つのグループが，同時に“磁束量子化”を発見した．それまで量子化は，原子レベルの世界でのみ起こると考えられていたが，マクロの世界でも起こることが初めて示された．

彼らは，直径 $10\,\mu$m の超伝導体円筒に磁場をかけたまま温度を下げて超伝導状態にした．磁場を取り去った後でも，円筒の中に磁束がトラップされており，しかも，驚くべきことに，磁束がトビトビの値を持っていた．ディーバーたちは，「磁束は $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ で量子化されていた.」と報告しているのに対し，ドルたちは，「量子化磁束の実測値は理論値 $2\Phi_0$ の40パーセントでしかない．その理由はわからない.」と述べている．

「なぜ，磁束が超伝導体で囲まれると，量子化されるのだろうか？」—その10年も前に，磁束量子化を予言していた人がいた．F. ロンドンである．1948年に出版された『超流動』という本の“脚注”で，「超伝導円筒を通る磁束は $2\Phi_0$ で量子化される.」と予言している．

ロンドンはこう考えた．「超伝導体中の電子は位相の揃った波として振舞う．その波が存続するためには，磁束のまわりを1周して元に戻ったとき，元の波と，山と山が一致しなければならない．原子の中の電子と同じである．シュレディンガー方程式によれば，電子が $2\Phi_0 = \frac{h}{e}$ の磁束を一周すると，一波長の位相変化を生じる．従って超伝導体で囲まれた磁束は，$2\Phi_0$ の整数倍でなければならない.」

ロンドンが予測した単位磁束は $2\Phi_0$ だったが，実験で見出されたのは，その $\frac{1}{2}$ であった．理由は，同時に発表された2つの理論の論文によって明らかにされた．

C.N. ヤンは，ディーバーとフェアーバンクの実験が始まった頃，スタンフォード大学に滞在していた．データを見せてもらったヤンは，スタンフォード大学のN. バイヤースと共に，「Φ_0 での磁束量子化は，新しい物理を必要とするか？」という疑問を理論的に考察し，このタイトルの論文で，これまでの超伝導理論で解釈できることを明らかにした．さらに Φ_0 での磁束量子化は，「クーパー・ペアが超伝導を担っていることの直接の証拠である」と結論づけた．

もう一つの論文は，L. オンサーガーによるものであった．彼は，ロンドンに少し遅れ1954年に「超伝導体中の電子の波動関数の位相が各点で定まった値をもつためには，超伝導円筒の中を通った磁束は，$2\Phi_0$ の整数倍になるはずである」と考え，磁束量子化を予言していた．

だが，これらの実験によって，超伝導体で取り囲まれた磁束は，Φ_0 の整数倍しか取り得ないことがはっきりした．マイスナー効果と同様，超伝導円筒の内側の表面に超伝導電流がぐるぐる流れて電磁コイルの役割をして磁束をトラップする．同時に，$-2e$ の電荷をもったクーパー・ペアの波が $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ の磁束を取り囲むと，ちょうど一波長だけ位相変化が生じるので，磁束は Φ_0 の整数倍に量子化する．印加磁場を取り除いても，磁力線が，超伝導体を通り抜けられないため磁束はトラップされたままである．この磁束量子化現象の発見によって，ミクロの世界を支配する量子化現象が，マクロな世界にも顔を出すことが，実験的に示された．マクロな超伝導体の中に，一体となった波動関数が存在し，

量子現象を引き起こす！

14.4 磁束が量子化する過程を見る

AB 効果の検証実験では，ドーナツ状の磁石からわずかな磁場をも漏らさぬように，磁石のまわりを超伝導体で取り囲んだ (図 14.2)．常温では，ドーナツ状の磁石の孔の中を通る磁束は，量子化されていない．サンプルを臨界温度[傍注 2]以下に冷やして超伝導状態にすると，磁束量子化現象が起こる．超伝導電流が，超伝導体の内壁に流れて全体の磁束を Φ_0 の整数倍にする．超伝導を破るよりも，超伝導電流を流してでも超伝導を維持したほうがエネルギーが低いからである．

［傍注 2］ 鉛，ニオブなどの物質を冷やしたとき，超伝導状態になる温度を，臨界温度と呼ぶ．鉛，錫，ニオブの臨界温度は，それぞれ絶対温度 7.2 K，3.7 K，9.2 K である．

「サンプルの温度を冷やしながら，磁束が量子化する様子を，電子波で，じかに観測できないものだろうか？」―これこそが，1983 年の ISQM で行った私の講演に対する C.N. ヤン先生のコメントであった．

実験結果を図 14.3 に示す．常温での干渉パターン (a) では，ドーナツの孔の中の縞は，外の縞よりごくわずかだけ上にずれている．15 K[傍注 3] まで冷やすと，孔の中の縞 (b) は，さらに上に移動する．外側の縞の中線より少し下まで上がっている．位相差にして 0.4 波長である．ニオブは臨界温度 9.2 K 以下で超伝導になるので，まだ超伝導にはなってないはずである．「何故，位相が変化したのか？」―磁石を低温にしたために，スピンの熱振動が減少し，スピンの向きが揃って磁化の値が増えたためである．

［傍注 3］ 15 K は，15 ケルビンと呼ぶ．絶対温度 15 度とも読み，−258℃ を意味する．絶対温度 0 K は −273℃，273 K は 0℃ にあたる．

さらに温度を下げて，9.2 K になった途端，孔の中の縞が，さらに上に移動し，外側の縞のちょうど真ん中になり，位相差が $\frac{1}{2}$ 波長になる．ニオブが超伝導状態に転移したために，超伝導電流が流れて磁束を増やし，全磁束が量子化したものである．まさに，“磁束が量子化した瞬間” を捉えた訳である．ただし，この場合，全磁束が超伝導電流によって作られている訳ではない．量子化するための最小の端数分の磁束を作る電流が流れる．

磁束量子化現象は，磁束が超伝導体で完全に取り囲まれたときに起こる．このとき，マイスナー効果によって，内部の磁場は外部に漏れることはない．AB

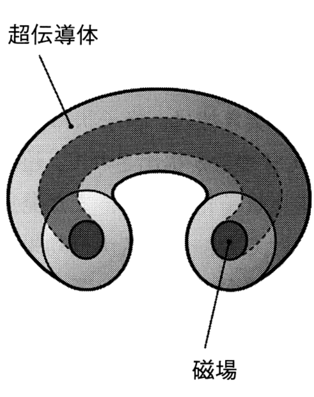


図 14.2　アハラノフ・ボーム効果の実験に使ったサンプル．

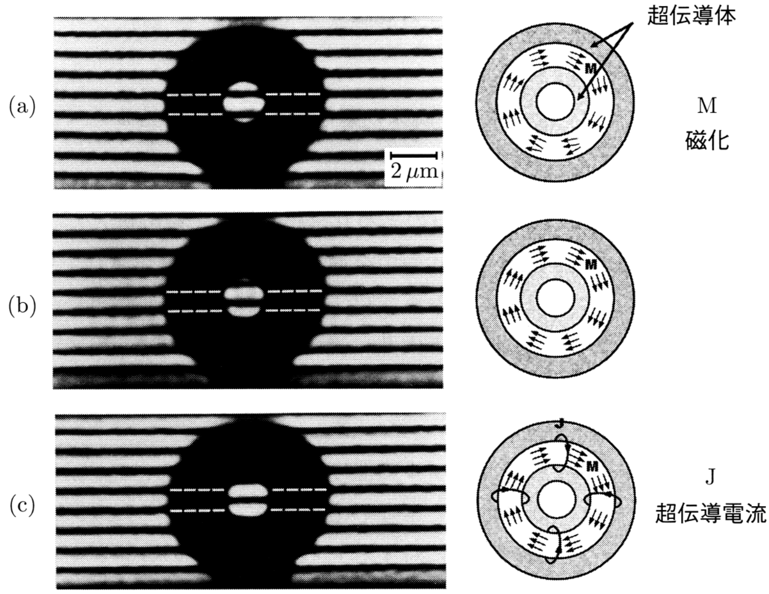


図 14.3　超伝導ニオブで取り囲まれたリング状磁石の電子線の干渉パターン．(a) 300 K での位相差 = $\frac{1}{4}$ 波長，(b) 15 K での位相差 = 0.4 波長，(c) 5 K での位相差 = $\frac{1}{2}$ 波長．

効果の検証実験では，この磁束量子化を，磁場が電子線に触れていない証拠として用いた．

このドーナツ状磁石の中を流れる磁束 Φ の値は常温で 8.5 Φ_0 である（図 14.3 (a)）．15 K では 8.8 Φ_0 に増え (b)，5 K でさらに増えて 9 Φ_0 と量子化した (c)**傍注 4**．

［傍注 4］　磁束の絶対値は，干渉縞だけからは分からない．波長の整数倍に対応する磁束の値を決めることはできない．分かるのは，磁束を Φ_0 単位で測ったときの端数分である．Φ の絶対値は磁石の断面積から計算した．

別のサンプルを使って磁束量子化で位相差が 0 になる例を図 14.4 に示す．常温で磁束が 9.5 Φ_0 だったものが，15 K で 10.3 Φ_0 に増加し，超伝導になると，とたんに 10 Φ_0 に量子化する．今度は，図 14.3 の場合とは逆方向に超伝導電流が流れて磁束を減少させて，磁束量子化が起きたのである．

14.5 量子化した磁束が超伝導体を突き抜ける！—アブリコソフの予言—

磁束量子化現象が発見される以前の 1957 年，A.A. アブリコソフ（図 14.5）は，超伝導体に磁場をかけると，量子化された磁束の糸，“磁束量子” が超伝導体を突き抜け，格子状に整列することを予言した．1957 年と言えば，ちょうど BCS 理論が提出されて，超伝導のメカニズムがやっと明らかになった年である．磁束量子化現象も，まだ発見されていなかった．それまで，超伝導体に磁場をかけても，マイスナー効果によって内部に侵入できないが，さらに強くすると超伝導が一気に破れてしまうと考えられていた．しかしアブリコソフは，新たな “第二種” 超伝導体の存在を予言した[2)]．ここでは，磁束が細い糸になって超伝導体を突き抜ける．超伝導電流が渦を巻き，“渦糸” を作る．

常識を越えた理論だったため，アブリコソフの先生であったL. ランダウです

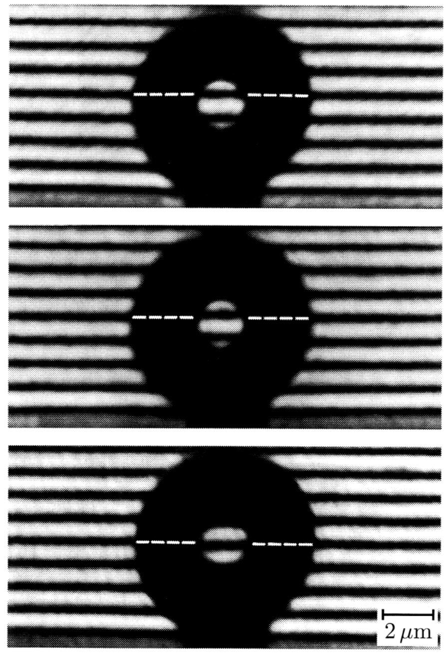


図 14.4　超伝導ニオブで取り囲まれたリング状磁石の電子線の干渉パターン．(a) 300 K での位相差 $= -0.1$ 波長，(b) 15 K での位相差 $= +0.15$ 波長，(c) 5 K での位相差 $= 0$.

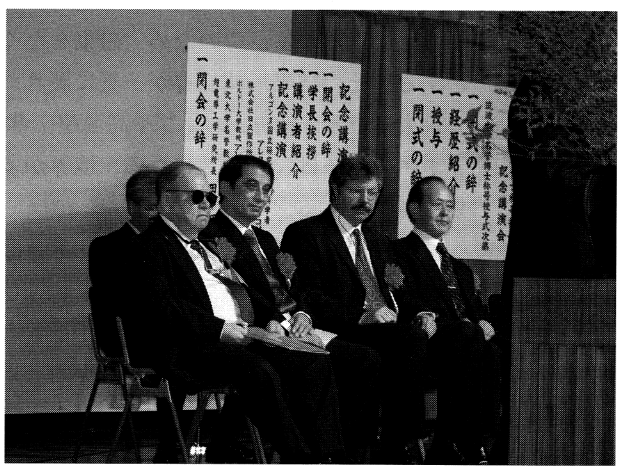


図 14.5　A.A. アブリコソフ．2005 年 10 月 13 日 筑波大学名誉博士授与式典にて．前列左の黒メガネの方がアブリコソフである．

ら，すぐには信じなかったという．ランダウに提出した論文は，2 年間もランダウの机の中に眠っていた[傍注 5]．こんな状態だったのでアブリコソフの論文が世に出ても，すぐには認められなかった．1961 年に，“磁場に強い欠陥だらけの超伝導材料” の存在がベル研究所で発見され，その謎を解くために，アブリコソフの理論がひっぱり出された．

そもそも，超伝導体が低温で超伝導状態になるのは，その状態のエネルギーが低いからである．超伝導体に磁場が少しかかったからといって，すぐに超伝導が破れて常伝導になるわけではない．磁場が内部に侵入しないように超伝導

[傍注 5]　超流導現象の解明でノーベル賞をもらったランダウは，「粘性のない超流動の中では渦は生じない」と考えていた．むしろ，それを超流動の本質として捉えていた．このため，「超伝導体中でも渦糸は生じない」と考えたのであろう．「超流動ヘリウムの中にも渦が存在し，しかも量子化している」ことを明らかにしたのは，R.P. ファインマンである．これを知って，ランダウは，やっとアブリコソフの論文を机の中から引っぱり出したという．

体表面に電流が流れて，内部の磁場をゼロにする．磁力線は超伝導体を迂回しなければならなくなる．その分，磁場のエネルギーが増加し，電流も増えるので，それにも限界がある．

耐えきれなくなると，磁力線が超伝導体を突き抜ける．第二種超伝導体では，エネルギーの高い常伝導の領域をできるだけ小さくしようと細い糸になり，そこを磁束が通る．これが，“磁束量子” である．超伝導電流が糸のまわりを渦状に流れるので，これが “渦糸” と呼ばれる．他方，大きく迂回していた磁力線は，ほぼまっすぐになるので，磁力線のエネルギーは低くなる．

14.6 境界エネルギーの異なる二種類の超伝導体

超伝導体には，磁束量子が生じるものと生じないものの二種類あることが明らかになった．「一体，何が違うのだろうか？」

磁場が超伝導体の中を突き抜けると，超伝導と常伝導の2つの領域ができて，境界が生じる．この境界層は，ごく薄いけれども，小さな磁束量子にとっては大きな効果を与える．

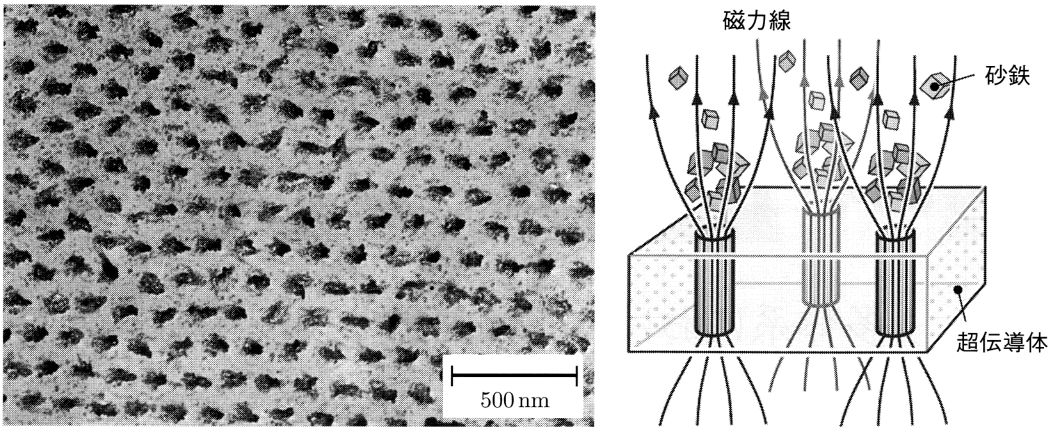
「境界層のエネルギーは高くなるのか，低くなるのか？」―実は，境界のエネルギーは，物質に依存し，プラスにもマイナスにもなる．鉛などの超伝導体は，“第一種超伝導体” と呼ばれ，エネルギーがプラスなので，境界層の体積は小さくなりたがる．このため，磁束をたくさんまとめた形で超伝導体を通そうとする．その結果，超伝導が一気に破れたり，条件によっては磁束量子がいくつか束になる．他方，ニオブや高温超伝導体などの “第二種超伝導体” では，境界エネルギーはマイナスになる．境界が多くなるように，磁束量子が個々に独立して存在する．

「第二種超伝導体中に磁束量子がぎゅう詰めになったとき，どんな配置をとるのだろうか？」―磁束量子は格子状にびっしりと並ぶ．アブリコソフは，四角格子を組むのが最もエネルギーが低いという計算結果を得た．後に三角格子のほうが少しだけエネルギーが低いことがわかる．

14.7 磁束量子を観察する

アブリコソフの理論によって，“磁場に強い超伝導体” の存在が明らかになり，超伝導の発見者K. オンネスの夢であった強力なマグネットも実現の可能性が拓けた．だが超伝導体に抵抗ゼロで電流を流そうとすると，すぐに超伝導状態が壊れてしまった．電流に伴う磁場によってクーパー・ペアの波の位相が乱されてしまうからである．第二種超伝導体では，磁束量子が生じるものの，今度は電流を流すと磁束量子に力が働いて動き出すために，超伝導が破れてしまう．しかし，磁束量子が動きさえしなければ，超伝導状態は維持できる．

その策は，ベル研究所で見出された不純物がたくさん入った材料の中にヒントが隠されていた．磁束量子を作るには，中心に常伝導の芯を作らなければな



(a)　　　(b)

図 14.6　規則正しく並ぶ磁束量子．(a) ビッター写真，(b) 模式図．

らない．しかし，超伝導体の中に常伝導領域を作るには，余分なエネルギーが必要になる．物質中に初めから常伝導の小さな欠陥が存在すれば，磁束量子は欠陥の位置に固定されることになる．この“ピン止め”は，超伝導体実用化のための最も重要な課題となる．

磁束量子は，超伝導の基礎現象であるというだけでなく，超伝導体実用化の鍵をも握っている．このため磁束量子の姿を直接捉えようという研究が，あちこちでスタートした．

磁束量子が格子状に並んでいるという最初の証拠は中性子線を使って得られた．中性子は電荷を持っていない．その代わり“スピン”を持っていて，磁束量子の磁場によって力を受ける．これを利用して得た中性子回折パターンから，磁束量子が周期的に並んでいることが見出された．ただし，1 個 1 個の磁束量子を見た訳ではない．

1967 年，さらに直接的な方法で磁束格子が観察された．西ドイツの U. エスマンと H. トロイブルが，ビッター法[傍注6]を用いて磁束量子の姿を捉えたのである[3]．写真（図 14.6）を見ると，磁束量子が見事に三角格子を組んで配列している．紙面すれすれの方向から見ると，磁束量子が格子を組んでいるだけでなく，“格子の並び”が，ずれている所もある．

[傍注6]　細かい砂鉄を超伝導表面にふりかけると，磁束量子が表面に顔を出した所に砂鉄が集まる．それを電子顕微鏡で観察する方法をビッター法と呼ぶ．

だが，本物の磁束量子を見たい．できれば，動いている様子をも見てみたい．これは私だけの夢でない．元々は，私の上司だった渡辺宏さんの 1965 年以来の夢でもあった．この話の続きは次回以降にしたい．

なお，本原稿は江沢洋先生，栗原進先生に見ていただいた．

参考文献

1)　1961 年の *Phys. Rev. Lett.* 7 巻の 43 頁から 52 頁に磁束量子化に関する 4 つの論文が並んで掲載された．
2)　A. Abrikosov: *Soviet Physics JETP* **5** (1957) 1174–1182.
3)　U. Essmann and H. Träuble: *Phys. Lett.* **24A** (1967) 526–527.

（とのむら・あきら，（株）日立製作所基礎研究所／（独）理化学研究所基幹研究所／（独）沖縄科学技術研究基盤整備機構）

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第10回

多体系における集団運動と個別運動

香取 眞理・中野 徹

学部の力学の授業では1粒子系と2粒子系の問題をいくつも解いた．しかし，3粒子系になると一般には解析的に解けなくなる．ところが粒子数が非常に多くなると，個々の粒子の運動に加えて，それらを重ね合わせた**集団的な運動モード**が出現し，**フーリエ変換**を用いて解析することが可能となる．その例として電子の集団的な振舞いを調べることにしよう．**金属**中では多数の電子が自由に動き回っているし，原子が電離した**プラズマ**では電子とイオンが自由に運動している．力学，電磁気学，統計力学を総動員して**多体問題**を解いてみよう．

10.1 デバイ遮蔽

電子と正電荷のイオンの粒子数密度が等しい，**電気的に中性**のプラズマを考える．この中に正のテスト電荷 $Q>0$ を置くと，その周りのプラズマはどのように応答するのであろうか．電子はテスト電荷から引力を受け，イオンは反発する．ただし，イオンは電子より圧倒的に重いのでその動きは遅く，電子だけが速やかにテスト電荷に反応する．そこで，イオンは空間的に一様に分布したままで動かず，電子だけが自由に動くと考えてよい．電子は全体的に配置を変えて，正電荷 Q を遮蔽しようとする．その結果，遠方から見ると，テスト電荷 Q は**電子の衣**を着たように見える．このような現象はデバイとヒュッケルにより電解質中で調べられた．一般に**デバイ遮蔽**と呼ばれている．

問題 10.1　原点に正電荷 Q を置いたとき，そこから r だけ離れた点での静電ポテンシャル $\phi(r)$ の満たすポアッソン方程式を書き下しなさい．ただし正電荷のイオンは粒子数密度 n_0 で一様に分布していているのに対して，電子は温度 T のカノニカル分布に従うとしなさい．

解答　点 $\boldsymbol{x}$ での電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ は素電荷を $e>0$ として

$$\rho(\boldsymbol{x}) = Q\delta(\boldsymbol{x}) + en_0 - en_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}) \qquad (10.1)$$

である．ここで第1項は原点の正電荷による電荷密度，第2項は一様な正電荷による密度，第3項は粒子数密度 $n_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x})$ の電子によるものである．

電子は原点に置かれた正電荷から引力を受けるので，原点近くの電子密度は増えるであろう．点 $\boldsymbol{x}$ の電子は静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ により，$-e\phi(\boldsymbol{x})$ だけのポテンシャルエネルギーを持つ．電子系は温度 T の**熱平衡状態**にあるので，密度は**カノニカル分布**に従って

$$n_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}) = n_0 \exp\left[\frac{e\phi(\boldsymbol{x})}{k_{\mathrm{B}}T}\right] \qquad (10.2)$$

と表される．係数が n_0 になっているのは，正電荷 Q の影響がない $\phi=0$ では，$n_{\mathrm{e}}=n_0$ であるからである．

点 $\boldsymbol{x}$ でのポアッソン方程式 $\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = -\rho(\boldsymbol{x})/\varepsilon_0$ に (10.1) と (10.2) を代入すれば，$\phi(\boldsymbol{x})$ に対して閉じた方程式

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left\{Q\delta(\boldsymbol{x}) + en_0 - en_0 \exp\left[\frac{e\phi(\boldsymbol{x})}{k_{\mathrm{B}}T}\right]\right\} \tag{10.3}$$

が導かれる． ■

(10.3) 式を解析的に解くのは不可能である．そこで右辺最後の項の指数関数を

$$\exp\left[\frac{e\phi(\boldsymbol{x})}{k_{\mathrm{B}}T}\right] = 1 + \frac{e\phi(\boldsymbol{x})}{k_{\mathrm{B}}T} + \cdots$$

のように展開しよう．2 次以下の項が無視できる条件は $(e\phi(\boldsymbol{x}))/(k_{\mathrm{B}}T) \ll 1$ である．裸のテスト電荷による静電ポテンシャルは $\phi = Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$ であるから，上の不等式が成り立つ条件は，Q が小さいか r が大きい場合である．よって，Q から十分離れた点ではポアッソン方程式 (10.3) を

$$\left(\Delta - k_{\mathrm{D}}^2\right)\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{x}) \tag{10.4}$$

で近似できることになる．ここで

$$k_{\mathrm{D}}^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_{\mathrm{B}}T} \tag{10.5}$$

である．k_{D} は長さの逆数の次元を持っていて，**デバイ波数**と呼ばれる．

> **問題 10.2**　(10.4) 式をフーリエ変換を用いて解きなさい．

解答　本連載第 7 回の「フーリエ級数とフーリエ変換」での説明を思い出して，

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \widehat{\phi}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}, \tag{10.6}$$

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}$$

として，(10.4) 式に代入する．モード $\boldsymbol{k}$ の**直交性**を用いると，$\widehat{\phi}(\boldsymbol{k}) = (Q/\varepsilon_0)/(k^2 + k_{\mathrm{D}}^2)$ を得る．これを (10.6) 式に代入すると，

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{Q}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{k^2 + k_{\mathrm{D}}^2}d\boldsymbol{k}.$$

$\boldsymbol{k}$ を 3 次元極座標 (k, θ, φ) で表す．ただし，θ は $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{x}$ の成す角とする．$d\boldsymbol{k} = k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi$ であり，φ の積分をすると因子 2π が出る．θ の積分で $\mu = \cos\theta$ と置くと

$$\phi(r) = \frac{Q}{(2\pi)^2\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + k_{\mathrm{D}}^2}dk \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{ikr\mu}d\mu.$$

ここで $r = |\boldsymbol{x}|$ である．μ に関する積分は容易に実行できて

$$\phi(r) = \frac{Q}{i(2\pi)^2\varepsilon_0 r}\int_{-\infty}^\infty \frac{k}{k^2 + k_{\mathrm{D}}^2}\mathrm{e}^{ikr}dk$$

となる．積分を複素積分に拡張して，複素上半平面内の原点を中心とする半径無限大の半円を積分路に付け加える．e^{ikr} $(r > 0)$ という因子のために，加えられた半円の円周上での積分は（半径無限大の極限では）零なので，こうしても積分値は変わらない．結局，コーシー積分を計算すればよいことになり，極 $k = ik_{\mathrm{D}}$ の寄与から，

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{e}^{-k_{\mathrm{D}}r} \tag{10.7}$$

と求められる． ■

(10.7) は裸のクーロンポテンシャル $Q/4\pi\varepsilon_0 r$ に，因子 $\exp(-k_{\mathrm{D}}r)$ が掛かった形をしている．このような形のポテンシャルは**湯川型ポテンシャル**と名づけられている．$\lambda_{\mathrm{D}} = 1/k_{\mathrm{D}}$ とする．(10.7) の値は $r \ll \lambda_{\mathrm{D}}$ では裸のポテンシャルと変わらないが，$r \gg \lambda_{\mathrm{D}}$ では非常に小さくなる：ポテンシャルの**有効距離**は λ_{D} である．これを**デバイ長さ**と呼ぶ．図 10.1 に裸のクーロンポテンシャルと湯川型ポテンシャルの両方を描いてみた．両者の違いは遠方で顕著である．

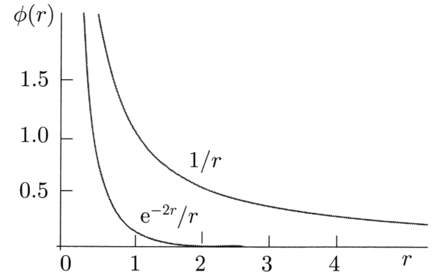


図 10.1　裸のクーロンポテンシャルと湯川型ポテンシャル（$\lambda_{\mathrm{D}} = 0.5$）の比較．

問題 10.3　電荷 Q を中心とした半径 R の中に含まれる電荷 Q_R を計算し，それを Q と比較しなさい．

解答　電荷 Q から距離 r だけ離れた点での電場は外向きで，その大きさは

$$E(r) = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+\frac{r}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right)\mathrm{e}^{-r/\lambda_{\mathrm{D}}}.$$

である．**ガウスの法則**によれば，半径 R の中に含まれる電荷 Q_R は

$$Q_R = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E(R) = Q\left(1+\frac{R}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right)\mathrm{e}^{-R/\lambda_{\mathrm{D}}} \tag{10.8}$$

である．■

$R \to 0$ では，Q_R は裸のテスト電荷 Q に等しくなるが，$R \gg \lambda_{\mathrm{D}}$ では $Q_R \simeq 0$ である．(10.8) 式は，$R \gg \lambda_{\mathrm{D}}$ では電荷 Q が電子によって遮蔽されていることを明示している．

10.2 プラズマ振動

電子とイオンが混ざり合った一様な状態を考える．その中で電子のクラスター (塊) が少しだけ空間的に変位したとしよう．するとこのクラスターは，他の電子やイオンから変位の向きと反対向きの力を受ける．このことから，電子のクラスターはバネの運動と同じように振動することが期待される．これはいろいろなプラズマで観測される典型的な振動であり，**プラズマ振動**と呼ばれる．

この電子クラスターの振動運動を正確に記述するために，電子の粒子数密度 $n(\boldsymbol{x},t)$ の時間変化を調べよう．クラスターをつくる電子の平均速度を $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ とすれば，電子密度に対する**連続の式**は

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\boldsymbol{v}) = 0 \tag{10.9}$$

と書ける．$\boldsymbol{v}$ の値は小さく，また電子密度は平均値 n_0 からほんの僅かしかずれていないとして $n(\boldsymbol{x},t) = n_0 + \delta n(\boldsymbol{x},t)$ とおいて，$\boldsymbol{v}$ と δn に関して (10.9) 式を**線形化**すれば

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{10.10}$$

となる．電子のクラスターは，電場と圧力勾配の両方の影響を受けるが，簡単のためにプラズマの温度を絶対零度として，電場の影響だけを考慮する：

$$m\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -e\boldsymbol{E}. \tag{10.11}$$

電場は，空間分布が一様な密度 n_0 の正イオンと非一様な密度 n の電子から生じるので，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(n_0 - n)e = -\frac{e}{\varepsilon_0}\delta n. \tag{10.12}$$

問題 10.4　式 (10.10)〜(10.12) より，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{E}$ を消去して，電子の粒子数密度の揺らぎ δn に対する方程式を導きなさい．そして，それは角振動数 $\omega_{\mathrm{p}} = \sqrt{n_0 e^2/\varepsilon_0 m}$ で振動することを示しなさい．

解答　(10.10) 式を t で偏微分すると，

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} + n_0 \nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0.$$

第 2 項に (10.11) 式を代入すると，

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - \frac{n_0 e}{m}\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0.$$

これに (10.12) 式を代入すると，

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}\right]\delta n = 0.$$

したがって電子密度は角振動数

$$\omega_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}} \tag{10.13}$$

で振動することが分かる．■

プラズマ振動は，**核融合のプラズマ**，地球の**電離層のプラズマ**，**金属中の自由電子のプラズマ**など，いろいろなところで観測される．(10.13) 式の m, e, ε_0 に数値を代入すれば，$\omega_{\mathrm{p}} \fallingdotseq 57 n_0^{1/2}$ となる．イオンと電子の平均密度 n_0 の値によって**プラズマ振動数** ω_{p} の値は大きく変わる．金属中のプラズマ振動数は $10^{16}\mathrm{rad/s}$ のオーダーであり，電離層のプラズマ（$n_0 \fallingdotseq 3\times10^{11}\mathrm{m^{-3}}$）では，

10^7 rad/s のオーダーである[1)].

実は我々は，プラズマ振動の効果を日常的に経験しているのである．金属が銀色に光って見えるのも，短波放送がラジオで聴けるのも，プラズマ振動のためなのである．振動数 ω_{p} のプラズマ振動が存在する媒質中に，振動数 ω の外部電場 E_{ext} を与える．すると媒質中の電子は変位を受け分極を起こし，媒質中の内部電場は E_{ext} とは異なる値になる．その値を E とすると**誘電率**は $\varepsilon = E_{\mathrm{ext}}/E$ で定義されるが，これは $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left[1 - \omega_{\mathrm{p}}^2/\omega^2\right]$ で与えられることが示せる．したがって媒質の**屈折率**は $\sqrt{1-\omega_{\mathrm{p}}^2/\omega^2}$ となる．$\omega > \omega_{\mathrm{p}}$ の高振動数の電磁波は，屈折率が実数なので，媒質中を自由に伝播できる．しかし，プラズマ振動数 ω_{p} より小さな振動数 $\omega < \omega_{\mathrm{p}}$ の電磁波では，屈折率は純虚数になってしまう．そのような電磁波は，プラズマに照射されてもプラズマ内には進入できずに，表面から跳ね返される．このため金属に電磁波を照射しても反射されてしまうのである．これが**金属光沢**の原因である．遠距離でも短波放送が聴けるのは，遠くの放送局から発信された電波が上空の**電離層**で反射され，地表に戻ってくるためである．

10.3 集団運動と個別運動

クーロン力という長距離相互作用に起因するデバイ遮蔽とプラズマ振動は，電子の**集団運動**の典型例である．ところが，電子は**熱運動**により**ランダムな個別運動**もしている．個別運動と集団運動はどのような兼ね合いになっているのであろうか．この問題をボームとパインズ[2)]の研究に従って解説してみよう．問題が少し難しいので，分割して考えてみることにする．

体積 V の中に N 個の電子があるとする．j 番目の電子の位置を $\boldsymbol{x}_j\,(j = 1, 2, \cdots, N)$ と書く．電気的中性を保つために一様な密度 $n_0\ (= N/V)$ の正電荷があるとしよう．点 $\boldsymbol{x}$ での電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ は

$$\rho(\boldsymbol{x}) = n_0 e - e\sum_{j=1}^{N}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j) \qquad (10.14)$$

のように表される．右辺の第 1 項は一様な正電荷からの寄与であり，第 2 項は電子からの寄与である．これが正しい表現になっていることを確かめるために，体積 v の部分領域 Λ で積分してみよう．すると

$$\int_{\Lambda}\rho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = n_0 ev - e\sum_{j:\boldsymbol{x}_j\in\Lambda}1 \qquad (10.15)$$

となり，ちゃんと領域 Λ 内に含まれる正電荷と電子の寄与の和になっていることが分かる．

系全体では電気的に中性であっても，(10.15) は零ではない．なぜなら個々の電子はランダムな熱運動をしているので，$\sum_{j:\boldsymbol{x}_j\in\Lambda}1$ がちょうど $n_0 v$ に等しいとは限らないからである．さらに前節で述べたプラズマ振動により，電子のクラスターが周期的に領域 Λ の中に入ったり，出たりしている．いろいろな大きさや形の部分領域 Λ で積分して得られる量 (10.15) と原理的に同じものであるが，もっと扱いやすい量がある．それは $\rho(\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換である．

第 7 回で**フーリエ変換**について述べたときには，システムサイズ $L\to\infty$ の極限をとり，波数 k を連続数として扱った．しかし体積 V が有限な領域に閉じ込めた現象を扱う場合は，L を有限に保ち，波数を離散的に取り扱う手法がよく用いられる．Ω として原点を中心とした一辺 L の立方体領域を考えることにする．体積は $V = L^3$ であり，

$$\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} \qquad (10.16)$$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \widehat{f}(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k} \\ &= \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\widehat{f}(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \qquad (10.17)\end{aligned}$$

とする．$\boldsymbol{k}$ に関する積分と和との間には，次の対応関係

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \Longleftrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}$$

があることを記憶しておくと便利である．

> **問題 10.5**　電荷密度 (10.14) のフーリエ変換 $\widehat{\rho}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい．

解答　(10.14) をフーリエ変換の公式 (10.16) に代入すれば，

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}(\boldsymbol{k}) &= \int_\Omega \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} \\ &= n_0 eV\delta_{\boldsymbol{k},0} - e\sum_j \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j} \quad (10.18)\end{aligned}$$

が導かれる．ここで $\delta_{\boldsymbol{k},0}$ はディラックのデルタ関数ではなく，離散数 $\boldsymbol{k}$ に対して定義されたクロネッカーのデルタ

$$\delta_{\boldsymbol{k},0} = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{k}=0 \\ 0, & \boldsymbol{k}\neq 0 \end{cases}$$

である．■

(10.18) 式の第 1 項が $\boldsymbol{k}=0$ 成分しか持たない一様な正電荷の寄与で，第 2 項が $\boldsymbol{k}\neq 0$ でも零ではない電子からの寄与である．$\boldsymbol{k}=0$ とすれば，第 2 項も Ne となり，$\widehat{\rho}(0)=0$ である（電気的中性）．

(10.18) の電荷密度の揺らぎ成分 $\widehat{\rho}(\boldsymbol{k})$ $(\boldsymbol{k}\neq 0)$ に注目しよう．$\widehat{\rho}(\boldsymbol{k})$ の代わりに，電子の粒子数密度の揺らぎ

$$\widehat{n}(\boldsymbol{k}) = \sum_j \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j}, \quad \boldsymbol{k}\neq 0 \qquad (10.19)$$

を考える．(10.18) 式より

$$\widehat{\rho}(\boldsymbol{k}) = -e\widehat{n}(\boldsymbol{k}), \quad \boldsymbol{k}\neq 0 \qquad (10.20)$$

である．粒子の座標 $\boldsymbol{x}_j$ はランダムなので，$\boldsymbol{k}\neq 0$ の $\widehat{n}(\boldsymbol{k})$ が特別大きな値をとることはない．しかしその時間的な振舞いは面白い．

(10.19) を時間で 2 度微分すると，

$$\begin{aligned}\ddot{\widehat{n}}(\boldsymbol{k}) &= -i\sum_j(\boldsymbol{k}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}_j)\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j} \\ &\quad -\sum_j(\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}_j)^2\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j}. \quad (10.21)\end{aligned}$$

ここで $\dot{a}$ で a の時間微分を表した．右辺第 2 項は各電子の速度によるが，第 1 項は各電子が他の電子と正電荷から受ける力に関する量であり，電子と正電荷の空間配置に依存する．

> **問題 10.6**　j 番目の電子が他の電子と正電荷から受ける力を計算することにより，(10.21) は
>
> $$\begin{aligned}\ddot{\widehat{n}}(\boldsymbol{k}) &= -\frac{e^2}{\varepsilon_0 mV}\sum_{\boldsymbol{q}(\neq 0)}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{q^2}\widehat{n}(\boldsymbol{q})\widehat{n}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) \\ &\quad -\sum_j(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_j)^2\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j}. \quad (10.22)\end{aligned}$$
>
> と変形できることを示しなさい．

解答　電子の質量を m とすれば，j 番目の電子の運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}_j = -e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_j). \qquad (10.23)$$

電場 $\boldsymbol{E}$ は電荷密度 ρ と静電ポテンシャル ϕ を用いて次のように計算される：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{x}), \quad \Delta\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x}), \rho(\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換をそれぞれ $\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}), \widehat{\phi}(\boldsymbol{k}), \widehat{\rho}(\boldsymbol{k})$ とすると，

$$\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}) = -i\boldsymbol{k}\widehat{\phi}(\boldsymbol{k}), \quad -k^2\widehat{\phi}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\widehat{\rho}(\boldsymbol{k}).$$

ゆえに

$$\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}) = -\frac{i}{\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{k}}{k^2}\widehat{\rho}(\boldsymbol{k}).$$

電気的に中性としたので，一様な電場はなく，$\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k})$ の $\boldsymbol{k}=0$ 成分は零である．(10.20) であるから，**フーリエ逆変換** (10.17) をすると，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{ie}{\varepsilon_0 V}\sum_{\boldsymbol{k}(\neq 0)}\frac{\boldsymbol{k}}{k^2}\widehat{n}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}. \qquad (10.24)$$

これを (10.23) 式に代入し，$\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{q}$ で置き換えると

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_j = -i\frac{e^2}{\varepsilon_0 mV}\sum_{\boldsymbol{q}(\neq 0)}\frac{\boldsymbol{q}}{q^2}\widehat{n}(\boldsymbol{q})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_j}.$$

これを用いると，(10.21) の右辺の第 1 項は

$$-\frac{e^2}{\varepsilon_0 mV}\sum_{\boldsymbol{q}(\neq 0)}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{q^2}\widehat{n}(\boldsymbol{q})\sum_j \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}_j}$$

となる．位相の j についての和を (10.19) 式で表せば，(10.21) 式は (10.22) 式になる．■

(10.22) の右辺第 1 項は粒子間の相互作用の**集団的な効果**であるのに対して，第 2 項は粒子間に相互作用がなくても存在する項で，個々の粒子のランダムな**個別的熱運動**に起因する．

(10.22) を解くのは難しい．その理由は，(i) 非線形項 $\widehat{n}(\boldsymbol{q})\widehat{n}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})$ があること，(ii) 第 2 項は個々の電子の速度に依存していることである．しかし粒子数 N が非常に多い場合には，次のような近似を用いることができる．

まず，$\widehat{n}(\boldsymbol{k})$ の大体の大きさを見積もっておこう．(10.19) 式によれば，$\widehat{n}(\boldsymbol{k})$ の平均値は零である．その 2 乗平均 $\langle\widehat{n}(\boldsymbol{k})\widehat{n}(\boldsymbol{q})\rangle$ も $\boldsymbol{q}\neq-\boldsymbol{k}$ では零である．$\boldsymbol{q}=-\boldsymbol{k}$ のときは

$$\langle\widehat{n}(\boldsymbol{k})\widehat{n}(-\boldsymbol{k})\rangle=\sum_{j,l}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_l-\boldsymbol{x}_j)}$$

であるが，$j\neq l$ では位相がバラバラなので零である．$j=l$ だけの寄与を拾うと $\langle\widehat{n}(\boldsymbol{k})\widehat{n}(-\boldsymbol{k})\rangle=N$ である．したがって $\widehat{n}(\boldsymbol{k})$ の振幅は $\sqrt{N}$ のオーダーである．

(10.22) の右辺第 1 項の $\boldsymbol{q}$ についての和を，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}$ とそれ以外に分けて考える．前者は因子 $\widehat{n}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k})=\widehat{n}(0)=N$ より，N のオーダーである．他方 $\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{k}$ の項は $\sqrt{N}$ のオーダーである．したがって $N\gg1$ のときは，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}$ の項が圧倒的に大きく，$\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{k}$ の項は無視してもよかろう．このような近似を **RPA**（random phase approximation，**ランダム位相近似**）と言う[*1)]．$n_0=N/V$ とすれば，(10.22) の右辺の第 1 項は $-(n_0e^2/\varepsilon_0 m)\widehat{n}(\boldsymbol{k})=-\omega_{\mathrm{p}}^2\widehat{n}(\boldsymbol{k})$ となる．

(10.22) の右辺第 2 項はどのような働きをするか．そこでは各粒子の速度 $\boldsymbol{v}_j$ と位置 $\boldsymbol{x}_j$ があらわに出てくるので，粒子ごとに寄与が異なるであろう．速度 $\boldsymbol{v}_j$ はランダムであり，**マクスウェル分布**に従って分布している．マクスウェル分布の特徴は，速度はいろいろな大きさを持つがどんぐりの背比べで同程度の値をとるということである．そこで $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_j)^2$ を平均値で置き換えよう：

$$\langle(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_j)^2\rangle=\frac{1}{3}k^2\langle v^2\rangle=\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}k^2.$$

すると (10.22) の右辺第 2 項は

$$\sum_i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_j)^2\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j}=\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}k^2\widehat{n}(\boldsymbol{k})$$

と書ける．ここで (10.19) 式を用いた．したがって (10.22) 式は

$$\ddot{\widehat{n}}(\boldsymbol{k})=-\left(\omega_{\mathrm{p}}^2+\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}k^2\right)\widehat{n}(\boldsymbol{k})$$

で近似できる．この式から，電子数密度の揺らぎが振動運動をすることが結論される．振動数は

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{p}}^2+\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}k^2 \qquad (10.25)$$

で与えられる：電子の集団運動が原因のプラズマ振動数（第 1 項）に，ランダムな熱運動による第 2 項が加わる．(10.25) のような振動数 ω と波数 $k=|\boldsymbol{k}|$ との関係式は一般に**分散関係**と呼ばれる．

集団運動である第 1 項が個別運動である第 2 項に卓越する条件は

$$k<\sqrt{\frac{m\omega_{\mathrm{p}}^2}{k_{\mathrm{B}}T}}=\sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 k_{\mathrm{B}}T}}=k_{\mathrm{D}}. \qquad (10.26)$$

波数がデバイ波数より小さな（波長がデバイ長より長い）電荷密度の揺らぎはプラズマ振動数で集団的に振動する．$\widehat{\rho}(\boldsymbol{k})$ は電荷密度を $\lambda\sim1/k$ に渡って平均したものであるから，スケール λ_{D} より大きな集団で平均されたものでは個別運動よりも集団運動が卓越するという直観とも合う結果になっている．

参考文献

1) 金属中でのプラズマ振動の観測については，「数理科学」2008 年 7 月号の外村彰：「目で見て学ぶ量子力学 第 3 回」に詳しい．

2) D. Bohm and D. Pines: *Phys. Rev.* **85**, 338 (1952).

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）

*1) 統計力学でいう**中央極限定理**と対応するものである．粒子数が大きくなると，RPA はますます正しくなる．



物理の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第12回

米国滞在の思い出

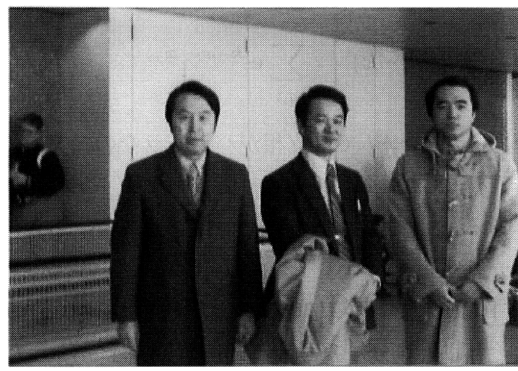
江　口　　徹

しばらく以前に学部時代の思い出について書いたことがあります[1)]．楽しかったのは，東大の駒場時代（教養学部）に理Iのクラスで何度も麻雀合宿に行ったこと，本郷に進んでからは数学好きな優秀なクラスメートがたくさんいて大いに学問的に啓発されたこと，物理学科に進学したけれど実験が嫌いでいつも実験をさぼりながら何とか単位を出してもらっていたことなどです．

一番の親友だったAさんとは一緒に実験をさぼって学内の喫茶店にいりびたって，有名な数学者や物理学者の話などをいつまでも話していました．この頃が今までで一番楽しかった時期のように思います．

私はその後物理の大学院に進学して他大学出身の人たちとも知り合いができました．同級生というのはいつも特別なものがありますが，阪大出身のFさんなどはそのキャラクターと業績で特に有名だと思います．彼の他にも同級生で活躍されている人がたくさんいます．私は博士課程で学生結婚して田無の核研の近くに住んでいましたが，本郷まで出て行くのが面倒になり大学に出るのをさぼって先生方にしかられたりしました．

そうこうしているうちに私は博士課程3年の夏からシカゴ大学に出かけることになりました．これは南部陽一郎先生のグループにポスドクとして



左から南部先生，西島和彦先生，筆者；シカゴ，1976年頃．

採用して頂いたためですが，本郷の素粒子研の先生方が推薦して下さったおかげです．そのころ南部先生はもう既に大変に有名な先生で，その研究室には何人も日本人の若手研究者が出入りしていました．シカゴ大学には初めに2年半，1年半ほど間をおいてさらに2年間滞在させて頂き5年近くお世話になりました．

私は自分にアメリカで物理をやっていくだけの準備ができているのかどうか不安と自信が半々に混ざり合った状態で渡米しました．1970年代のシカゴ大学の物理教室には有名な教授たちが揃っており，南部先生以外にも，天体理論のチャンドラセカール（Chandrasekhar），素粒子実験のクローニ

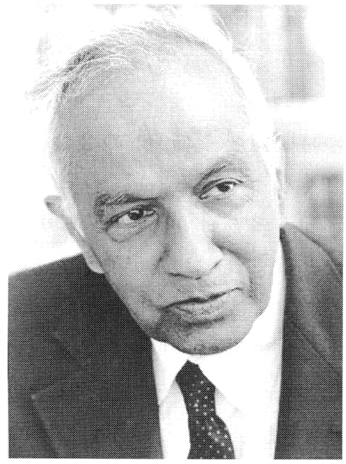
ン（Cronin），プラズマ理論のパーカー（Parker），原子物理のファノ（Fano），宇宙実験のシンプソン（Simpson）などが顔を揃えていました．2度目にシカゴにいったときには統計物理のカダノフ（Kadanoff）が新しく教授陣に加わっています．

2回にわたるシカゴ滞在の間にはスタンフォード大学に1年半ほど滞在しました．ここではアメリカ留学時代の思い出を少し書いてみることにします．若い読者の方に何かの参考になるかもしれません．

1. シカゴ大学

シカゴ大学はアメリカの中西部の大都会シカゴの南部に位置しています．大学のあるあたりは残念ながらセキュリティーにやや難があるため，大学関係者はほとんどがキャンパス周辺の狭いエリア（ハイドパークと呼ばれる）に住んでいます．大学まで歩いて5–20分の距離にあります．私も大学の近辺に住んで家内に車で送ってもらっていました．

シカゴ大学では南部先生に大変お世話になりましたが，思い出に残っていることの一つに天文学者チャンドラセカール（愛称チャンドラ）との交流があります．このころチャンドラはカー（Kerr）計量（回転しているブラックホールの時空）における電磁場やディラック粒子の伝搬に関する膨大な解析的な計算を行っていました．ニューマン・ペンローズ形式と呼ばれる方法を用いてたくさんの未知関数を含む連立微分方程式を調べるのですが，これらの式を足したり引いたり，掛けたり割ったり様々に工夫を凝らして徐々に未知関数を消去し，最後には一つの未知関数に関する常微分方程式に持ち込みます．彼は自分の仕事が進展すると人に話を聞かせないとすまない性分で，南部先生が長いことその聞き役を務めていたようでした．しかし先生はチャンドラの話を聞くのが次第に飽きてきたようで，私がシカゴにやって来ると私にチャンドラの御相手を命じました．そこで私が聞き役になりましたが，これがなかなか大変な仕事です．何十本もの込み入った式が並んでいる論文が何篇



チャンドラセカール（シカゴ大学（The University of Chicago）より許可を得て転載）．

もあってこれを読まないといけません．しかもきちんと読んでよく理解していないとチャンドラのご機嫌が悪くなります．そこで，必死に勉強をせざるを得なくなりました．

あるとき，チャンドラはカー・ブラックホールに外から電磁波が入射したときの反射係数，透過係数を調べてすばらしい発見をしたといって教室の談話会で発表しました．それは電磁波を電場，磁場の成分に分けたとき，それぞれの成分が従う微分方程式が全く違う形を持つにも関わらず，それぞれの反射係数，透過係数を計算してみると完全に一致してしまうという話でした．彼は一般相対論は神が与えた深遠な理論なのでこんな奇跡が起こると主張して大変ご機嫌な様子でした．

私はこの話を聞いて，ちょうどその頃興味があったソリトン理論で知られた現象に似ていると思いました．KdV方程式のようなソリトン方程式の理論では逆散乱法というものが使われます．すなわち，通常のポテンシャル問題ではポテンシャル $V(x)$ を与えて，透過係数，反射係数などの散乱データを求めるのですが，逆散乱法では散乱データが与えられたときに逆にポテンシャル $V(x)$ を決定することを考えます．このとき特に重要なことはソリトン理論の方程式に従ってポテンシャルが時間変化をする場合 $V(x,t)$ には散乱データが時間によらないかあるいは非常に簡単な時間依存性を持つことです．

チャンドラが発見した現象は，異なるポテンシャル $V_1(x), V_2(x)$ が等しい反射，透過係数を持つということなので，これらのポテンシャルが，ソリトン方程式の解の時間発展 $V(x,t)$ の2つの時間における値に等しくなっている（$V_1(x) = V(x, t = t_1)$, $V_2(x) = V(x, t = t_2)$）可能性があります．

詳しいことは忘れてしまいましたが，私は実際KdV方程式の解でチャンドラが調べた2つのポテンシャルを結ぶものを見つけることができました．このことをチャンドラに伝えると彼は不機嫌になって，逆散乱法などというものはけしからん，そんな手品はインチキだなどといってヘソを曲げました．彼は自分の発見がこんな論法で説明できてしまうのが気に入らなかったようです．後になって，カー・ブラックホールに関する一連の仕事をまとめて教科書『Mathematical Theory of Black Holes』という本を書いていますが，その序文ではソリトン理論を引いてその方法を評価しています．しかし私から聞いたとは書いていないので，私から指摘されたことはやはり面白くなかったようです．

この経験から，チャンドラセカールのような establish された研究者でも，その時その時の自分の仕事には夢中になり，猛烈な思い込みを持って研究をするものだということが良くわかります．彼から教わったブラックホールの quasinormal mode の話は最近になって AdS/CFT 対応に絡んで大変重要になってきました．彼はこの後，私の仕事（江口・ハンソン計量など）を高く評価してくれて，私が日本に帰るときも残念がってくれました．私がシカゴを去って数年後にノーベル賞を受けましたが，残念ながら亡くなられるまで再会する機会はありませんでした．このころチャンドラのグループにいたワルド（Wald），アシュテカ（Ashtekar），ホロビッツ（Horovitz）などはその後アメリカの代表的な相対論研究者に成長しました．1970年代はまだまだ素粒子と相対論とは距離のあった時代ですが，私は彼らと全く違和感なしに付き合っていました．このような分野を超えた交流が容易なことはアメリカの優れたところです．

2. スタンフォード大学

私はシカゴ大学に2年半ほどいて，西海岸のスタフォード大学に移りました．正確にはスタンフォード大学付属の線型加速器研究所（SLAC）です．スタンフォード大学はサンフランシスコから車で約1時間程南に下ったパロ・アルトと言う町にあります．現在このあたりはアメリカのハイテク産業の中心地，シリコンバレーの一角を占めており大変に活気のあるところです．当時，SLACは1960年代後半における深非弾性散乱のスケーリング則の発見や1974年の J/Ψ 粒子の発見などで大いに意気が上がっていた時代で，理論グループも活発でした．

SLACにいくとしばらくして，有名な数学者のシンガー（I. Singer）がバークレーでゲージ理論の幾何学について一学期間講義をするという話を聞きました．ちょうどポリアコフ（Polyakov）たちによって発見されたインスタントンがQCDの $U(1)$ カイラル対称性を破ることがトフーフト（'t Hooft）によって示され，ゲージ理論の幾何学的について関心が盛り上がっている時期でした．スタンフォードからバークレーまでは図書館の本の運搬に使うマイクロバスが毎日何回か走っていてこれを使うと簡単に行き来できます．私はバークレーのキャンパスに興味もあって講義に出てみることにしました．シンガーの講義は彼とアティヤ（Atiyah）による有名な指数定理のおさらいと，ゲージ理論のインスタントンモジュライ空間に関するアティヤ・ヒッチン・シンガーによる新しい論文の紹介が中心でした．本格的な数学の講義を聴くのは初めてでしたが，思ったほど難かしくはなく何となしに話の筋道が分かったような気がしました．数学者であるシンガーがどのようにして場の量子論を勉強したかといったことが講義の端々に出て来たのが特に面白いと感じました（「Bjorken–Drellの本のxx章を必死で読んだ」など．Bjorken–Drellは場の理論の基本的な教科書として当時広く使われていた）．彼はシカゴ大学の出身で学生当時数学に行くか物理に行くか大いに迷ったそうで，もと



SLACの理論部ソフトボールチーム，前列右から2番目がサスカインド（Susskind），後列左から3番目が筆者，右隣がビヨルケン（Bjorken），右から3番目がドレル（Drell）．

もと物理への関心は非常に高かったようです．次元正則化法（dimensional regularization）やゼータ関数正則化法なども講義にしばしば登場し，場の理論の手法に精通していると感じました．

この頃ハンソン（A. Hanson）と言う人と出会いました．奥さんが素粒子の実験家でSLACで仕事をしており，そのせいで時々SLACに来ていましたが，本人はバークレーの理論部のポスドクでした．彼はこの頃出回り始めた日本製のカップヌードルが好きで，どこからか手に入れて来たものをSLACの昼食の時間によく食べていました．ハンソンもシンガーの講義に出ることになり付き合いが始まりました．2人の関心は重力理論のインスタントン解（ユークリッド領域でのアインシュタイン方程式の解で，自己（反）双対の曲率をもつもの）を見つけることでしたが，初めは開いた多様体の場合に現れる指数定理の補正項などの計算を調べました．補正項を入れるとホーキング（Hawking）がインスタントンとして提案したタウブ・ナット（Taub–NUT）空間はanomalyがなくなり，インスタントンとは言えなくなるように思われます．こういう論文を書いたらホーキングからクレームが来て論文のタイトルを変えたりしました．

そのうちに，計量に関して$SU(2)$対称性に基礎をおく簡単なアンザッツを立てて曲率の自己双対性を要求すると，未知関数についての簡単な微分方程式が出てすぐに答えが見つかることが分かりました．これが江口・ハンソン解の発見です．しかし，アインシュタイン方程式の研究は長い歴史があるため我々のような素人が本当に新しい解を見つけることができたのか不安でした．特に，相対論には座標変換の自由度があるため，同じ計量が全く違った形に見えることがあります．そこで，解の位相不変量を求めて知られているものと比較したりしてみましたが，どうも知られたものには一致しません．シンガーの講義に出ていた微分幾何の長老のタウブ（Taub）にお伺いを立ててみましたが，彼も新しい解だろうという回答でした．

そこでプレプリントを作ってホーキングらのケンブリッジ大学のグループに送りました．すると，すぐにハンソンの友人のヒッチン（Hitchin）から手紙が来て，「お前たちの仕事は面白い．お前たちの解はA_1型のクライン特異点（複素2次元空間$\mathbf{C}_2$を$SU(2)$の離散部分群Γで割って得られる特異点）を解消してできた空間の上のハイパーケーラー計量になっていて，大域的なトポロジーは2次元球面S_2上のcotangent bundleになる．同じような計量がA_n, D_n, E_n型の特異点を解消した空間にも存在することが言える．」と言う説明がしてありました．我々の解は一見無限遠で平坦なユークリッド空間に近づくように見えますが無限遠の境界はS_3ではなくS_3/Z_2になっており，大域的なトポロジーがユークリッド空間と異なります．アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu}(g)(x) = 0$$

の正則な解で無限遠で平坦になるものは，自明なもの

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}$$

しかないという仮説をpositive action conjectureと呼びますが，この頃ちょうどスタンフォード大学にいた数学者のヤウ（Yau）がこの仮説を証明しようとしていました．我々の解は一見positive action conjectureを破るように見えますが，トポロジーが異なるため反例にはなりません．こうし

たやりとりからヤウとも付き合いができました．

この後，ケンブリッジのグループなどにより重力インスタントンに関する仕事が続きました．特にホーキングとギボンズ（Gibbons）による A_n 型特異点の場合への拡張は重要な結果です．この後，我々の解とギボンズ・ホーキングの解はあわせて ALE（Asymptotically Locally Euclidean）空間と呼ばれるようになります．A_n 型 ALE 空間の特徴はその中に n 個の独立な 2 次元球面が含まれていることで，これらが互いに交わる様子は $SU(n+1)$ のリー環のディンキン図のように見えます．ALE 空間の持つパラメーターを変化させると 2 次元球面の半径がゼロにつぶれるため，これらの球面は消滅サイクルと呼ばれます．

こうした研究から 20 年ほど経って，1990 年代の半ばから双対性や D ブレーンの発見など超弦理論に大きな発展が起こります．この発展の中で ALE 空間が弦理論において重要な役割を果たすことがわかってきました．すなわち，ALE 空間中の弦理論では D ブレーンが消滅サイクルに巻き付くことにより，新たなベクトル粒子が作られますが，これらはちょうどヤン・ミルズ理論のゲージ場のように振る舞うため，非可換ゲージ対称性が新たに生成されます．すなわち江口・ハンソン空間では $SU(2)$，一般の ALE 空間では $SU(n+1)$ のゲージ対称性が作られます．弦理論にはヘテロテック弦理論のように初めから非可換ゲージ対称性が理論の中にあらわな形で現れる場合もありますが，タイプ II の理論のように摂動的には $U(1)$ 対称性しか見えない場合もあります．しかし，ALE 空間を考えるとタイプ II 理論にも非可換なゲージ対称性が非摂動的に現れることが分かり，5 種類の弦理論が実はすべて等価であるという主張の強い証拠となります．

このように我々の発見は 20 年ほど経って，素粒子の統一理論の有力候補である超弦理論の役に立つことがわかってきました．理論の理解の進歩は早いように見えて案外遅いものです．

スタンフォード大学でもう一つ貴重な経験をしたのは，サスカインドによる集中講義です．サスカインドはこの頃ちょうどコーネル大学からスタンフォード大学に移って来て，一学期間格子ゲージ理論の講義を行いました．サスカインドはよく知られているように，物理的な直感やアナロジーに訴えて話をするのが得意で，数式を使わずに身振り手振りでわからせようとします．私はウイルソン（K. Wilson）らによる格子ゲージ理論の試みはよく知っていましたが，格子理論というのがローレンツ不変性もない何となくエレガンスのない話に見えてあまり関心が持てませんでした．しかしサスカインドの話を聞いてみて，格子理論はあまりかっこ良くはないが強い相互作用の力学を調べるの非常に強力な方法であることを理解しました．私は日本に帰ってしばらくして，ゲージ対称性の高い極限 $SU(\infty)$ の格子ゲージ理論について仕事をしましたが，この研究の素地はこの頃に培われたものです．

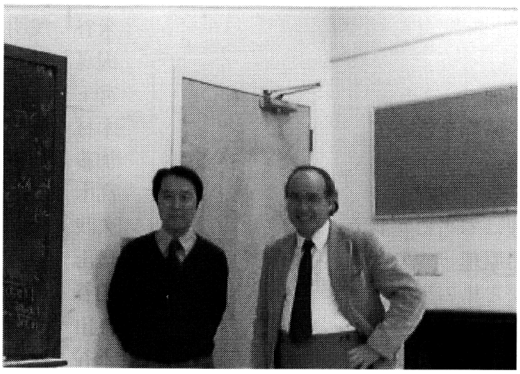


2002 年に中国・杭州で開かれた弦理論の会議．最前列にホーキング，前列左から 3 人目がグロス（Gross），右隣がウィッテン（Witten），さらに右隣の女性がウィッテンの奥さんナピ（Nappi），その後ろが筆者．前列右から 4 人目がヤウ．

3. 再びシカゴ大学

私はスタンフォードに 1 年半ほどいて再び南部先生に呼んで頂いてシカゴに帰ってきました．今回は物理教室の助教授にして頂きました．シカゴ大学は寛容で来たばかりのスタッフはしばらく授業をしなくても良いといってくれたので，ポスドク時代のようにぶらぶら好きに勉強をしていました．

シカゴに戻った冬学期だと思いますが，有名な数



アティヤと南部先生，シカゴ 1980 年頃.

学者のアティヤがシカゴ大に 1 学期間客員教授でやってきました．ゲージ理論や物理に興味を持っていた彼の希望に従って我々のグループにオフィスをおくことになり私の隣の部屋に入りました．そこで毎日のようにアティヤと話すチャンスがありました．南部先生も良く一緒になっておしゃべりをしました．アティヤは最も話しやすいタイプの数学者で，我々の表現が数学的に不正確でも意に介せずにこちらの言いたいことの真意をくみ取ろうとしてくれます．当時私は南部先生といっしょにフラックスが多数分布している場合のボーム・アハラノフ効果を調べていましたが，こうした問題の相談にも乗ってくれました．またあるとき，ニースの国際数学者会議で発表されたブリースコーン（Brieskorn）の特異点の理論を詳しく聞かせてくれましたが，これは後になって役立ちました．物理のセミナーで Mean Field Approximation と言う言葉が出てきたら自分の名前と同じだ（M.F. Atiyah）とジョークを言ったり，シカゴの冬は寒いので自分は low temperature physicist になるとか言って楽しんでいました．

後に，ケンブリッジ大学などでしばしばお会いしましたが，私が現れると “Here comes the half of the metric”（江口・ハンソンの片割れと言う意味）などとからかっていました．

シカゴ大の 2 年目になると講義をすることになりましたが授業が 2 つほど当たりました．一つは物理数学，もう一つは大学院の素粒子特論で，1–2 年程前にザモロジコフ（Zamolodchikov）らによって発見されたソリトン理論の厳密 S 行列などを講義しました．

このころ南部先生と私は弦理論の運動方程式に相当するループ方程式に興味を持っていました．点粒子の運動方程式を紐についての運動方程式に何とか持ち上げようとするわけですが，私はこれを導くために南部・後藤作用の平方根を外したもの（Schild action）を採り，点粒子のときのプロパータイムの代わりに world-sheet の面積を時間のように見立てる式を考えました．一応意味のある定式化にはなっていますが，通常の場の理論としては繰り込み不可能な理論になるためやはり取扱いに困難があります．この直後に出たポリアコフによる定式化（独立な world-sheet の計量を入れて南部・後藤作用の平方根を外す）は繰り込み可能な理論を与えるため見通しが良く以後弦理論の標準的な定式化となりました．

4. 終わりに

以上，ざっとアメリカ留学時代の出来事を振り返ってみました．多くの優れた物理学者・数学者と直接付き合うことができたこと，ハンソン氏のような協力者に巡り会えたことなど私にとっては数多くの幸運がありました．滞在がかなり長くなったので一時はこのまま外国に留まるのかと思っていました．外国生活で敬語を忘れてしまい日本に帰ってもすぐには戻らずに教官会議で発言するときなどに困りました．

南部先生には最初から最後までお世話になりました．先生の論文選集を出版したのが唯一のお返しです[2)]．最近になって先生の仕事が詳しく知られる上でこの本が役立っているようで喜んでいます．

参考文献

1) 「数学の楽しみ」30 号，2002 年.
2) “Broken Symmetry”, selected papers by Y. Nambu, eds, T. Eguchi and K. Nishijima, World Scientific 1993.

（えぐち・とおる，京都大学基礎物理学研究所）

特　集（2009年12月号予告）

《原理》の探求

深遠なる物理法則の源に迫る

巻頭言	米谷　民明
力学	国場　敦夫
熱力学の原理	宮下　精二
量子力学の原理を求めて	木村　元
相対性理論	加藤　光裕
流体に成り立つ原理	高木　隆司
光学の原理は本当にエレガント？	久我　隆弘
宇宙論の諸原理	横山　順一
電気力学から場の理論へ	細谷　裕
［コラム］	青山　秀明
［インタビュー］	米谷　民明

本体952円

特　集（2009年10月号）

数学と物理に広がる不変量

量子トポロジーとその周辺

量子トポロジーと不変量	大槻　知忠
結び目の有限型不変量	葉廣　和夫
体積予想　量子不変量と双曲体積の思いがけない対応	村上　順
結び目の不変量と位相的弦理論	菅野　浩明
統計物理の可解模型と結び目不変量	出口　哲生
表現論と結び目不変量 Khovanov 理論の表現論への影響	有木　進
数論と結び目不変量	森下　昌紀
Planar algebra 入門 作用素環論から低次元トポロジーへの新しい流れ	佐藤　信哉
ヒーゴールフレアホモロジー Heegaard Floer homology	丹下　基生
［コラム］計算機科学と結び目不変量	長谷川真人
《名著に親しむ》量子不変量をめぐって	高田　敏恵
［編集部一問一答］不変量とは何か	大槻　知忠
《連載》目で見て学ぶ量子力学　その13	外村　彰
問題例で深める物理　その9	香取　眞理 中野　徹
《数学の道しるべ》第11回	儀我　美一

本体952円

編集後記

今回の特集中では多くの日本人の名前を見ることができます．特に京都大学数理解析研究所の研究者の方の活躍には目を見張るものがあります．それ以外にも我が国の重鎮の方々のお名前が登場し，日本の可積分研究の凄さがよくわかります．それと同時に同じ日本人として大変誇りに思います．

また，インタビューで時弘先生も仰っていますが，若い研究者の方も増えてきているということで，この先の発展が大変楽しみです．将来的には佐藤幹夫先生や戸田盛和先生のように世界にその名を轟かす研究者が出てくるかもしれません．その動向を注視したいところです．（R）

数　理　科　学　11月号

2009年11月1日発行

数理科学編集部　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社　**サ　イ　エ　ン　ス　社**　　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁